S. RÉALIS

# Résolution d'une équation indéterminée

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 2 (1883), p. 494-497
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__494_0>

## RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION INDÉTERMINÉE;

PAR M. S. RÉALIS,
Ingénieur à Turin.

Soit proposé de résoudre, en nombres entiers, l'équation indéterminée

$$x^2 + nxy - ny^2 = 1,$$

dans laquelle $n$ est un entier donné.

On s'assure facilement, par la substitution directe, que si une solution particulière est donnée par l'égalité

$$\alpha^2 + n\alpha\beta - n\beta^2 = 1,$$

on arrivera à une nouvelle solution au moyen des formules

$$\begin{cases} x = (n+1)\alpha - n\beta, \\ y = (n+2)\alpha - (n+1)\beta, \end{cases}$$

en admettant que $n$ est différent de $-1$ et de $-2$.

Cette solution, cependant, n'en produit pas d'autre, vu que, en y appliquant les mêmes formules, on retombe sur les valeurs $x = \alpha$, $y = \beta$. Mais la nature même de l'équation nous conduit à assigner une troisième solution distincte de la première et associée à la seconde, après quoi la continuation du procédé donnera naissance à une infinité de solutions subséquentes.

D'après cela, les valeurs initiales $\alpha = 1$, $\beta = 0$ ayant amené les valeurs $x = n+1$, $y = n+2$, résolvons l'équation par rapport à l'inconnue $x$, après y avoir fait $y = n+2$. Il nous viendra

$$x = -\frac{n(n+2)}{2} \pm \frac{n^2 + 4n + 2}{2},$$

où le signe supérieur correspond à la solution précédente, tandis que le signe inférieur nous met en présence de la solution associée

$$\begin{cases} x = -(n^2 - 3n \quad 1), \\ y = n + 2, \end{cases}$$

ou, en changeant les signes de $x$ et de $y$, ce qui n'altère pas le résultat de la substitution dans la proposée,

$$\begin{cases} x = n^2 + 3n - 1, \\ y = -(n + 2). \end{cases}$$

De celle-ci, par les mêmes formules, dérive une nouvelle solution, accompagnée d'une autre qui lui est associée, et ainsi de suite.

*Remarque.* — Écrivons les valeurs successives de $x$ comme il suit :

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= 1 - n, \\ x_3 &= 1 + 3n - n^2, \\ x_4 &= 1 - 6n + 5n^2 + n^3, \\ x_5 &= 1 + 10n - 15n^2 + 7n^3 - n^4, \\ x_6 &= 1 - 15n - 35n^2 - 28n^3 + 9n^4 - n^5, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

où le terme indépendant de $n$ est partout égal à l'unité. Nous reconnaîtrons aussitôt que les coefficients de $n$ sont donnés par la suite des nombres triangulaires; ceux de $n^2$ par la suite des nombres figurés du quatrième ordre; ceux de $n^3$ par la suite des nombres figurés du sixième ordre, etc. On est conduit à conclure de là que l'on doit avoir, en général,

$$\begin{aligned} x_a = 1 &- \frac{(a-1)a}{2} n - \frac{(a-2)(a-1)a(a+1)}{2.3.4} n^2 \\ &- \frac{(a-3)(a-2)\ldots(a+2)}{2.3.4.5.6} n^3 - \ldots - n^{a-1}, \end{aligned}$$

le coefficient de $n^k$ étant

$$\frac{(a-k)(a-k+1)(a-k+2)\ldots(a+k-1)}{2.3.4\ldots(2k-1).2k},$$

et c'est ce qui a lieu en effet; la vérification est facile, et nous ne nous y arrêterons pas.

Quant aux valeurs de $y$, on observera d'abord que, par la méthode même, chaque valeur d'indice impair est égale et de signe contraire à celle qui la précède, d'indice pair; c'est-à-dire que l'on a constamment

$$y_{2k+1} = -y_{2k}.$$

Il ne sera pas difficile d'établir ensuite la formule générale

$$\begin{aligned} y_a = a + \frac{(a-1)a(a+1)}{2.3}\,n + \frac{(a-2)(a-1)\ldots(a+2)}{2.3.4.5}\,n^2 \\ + \frac{(a-3)(a-2)\ldots(a+3)}{2.3.4.5.6.7}\,n^3 + \ldots + n^{a-1}, \end{aligned}$$

pour toute valeur paire de l'indice $a$. On voit ici apparaître, comme coefficients des différentes puissances de $n$, les nombres figurés d'ordre impair, de même que les nombres d'ordre pair se sont présentés dans l'expression de $x_a$. Le coefficient de $n^k$, dans $y_a$, est

$$\frac{(a-k)(a-k+1)(a-k+2)\ldots(a+k)}{2.3.4\ldots(2k+1)}.$$

Signalons la relation

$$y_a - y_{a-2} = x_{a-1} + x_a,$$

qui a lieu pour toute valeur paire de $a$, et d'où l'on déduit

$$y_a = x_1 + x_2 - x_3 + \ldots + x_{a-1} + x_a.$$

Cette formule nous reproduit (d'après la sommation connue des séries relatives aux nombres figurés) l'expression ci-dessus de $y_a$ en fonction de $n$.

Nous ajouterons, en terminant, que l'équation qui vient d'être traitée est un cas particulier d'une classe d'équations appartenant à la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 = h,$$

et dont la résolution s'obtient par des moyens analogues, sans avoir recours aux méthodes générales.