

ERNEST CESÁRO

**Démonstration élémentaire de la  
formule de Stirling**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 2  
(1883), p. 43-46

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1883\\_3\\_2\\_\\_43\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__43_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA FORMULE DE STIRLING;

PAR M. ERNEST CESARO.

---

I. Considérons l'expression

$$\varphi_n = \sqrt{\left(\frac{2}{1}\right)^4 \left(\frac{3}{2}\right)^6 \left(\frac{4}{3}\right)^8 \cdots \left(\frac{n}{n-1}\right)^{2n-1}};$$

on la transforme aisément en

$$\varphi_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{1.2.3\dots n},$$

d'où

$$(1) \quad 1.2.3\dots n = \frac{1}{\varphi_n} n^{n+\frac{1}{2}}.$$

II. Calculons  $\varphi_n$ . Nous avons

$$l\varphi_n = \frac{3}{2} l\frac{2}{1} + \frac{5}{2} l\frac{3}{2} + \frac{7}{2} l\frac{4}{3} + \dots + \frac{2n-1}{2} l\frac{n}{n-1}.$$

( 44 )

Or

$$l \frac{n}{n-1} = \frac{2}{1} \frac{1}{2n-1} + \frac{2}{3} \frac{1}{(2n-1)^3} + \frac{2}{5} \frac{1}{(2n-1)^5} + \dots,$$

et, par suite,

$$\frac{2n-1}{2} l \frac{n}{n-1} = 1 + u_{n-1},$$

si l'on pose

$$u_{n-1} = \frac{1}{3} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2n-1)^4} + \dots$$

Donc

$$(2) \quad l \varphi_n = n-1 + (u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}) = n-1 + S_{n-1}.$$

III. Afin de calculer  $S_{n-1}$ , étudions la série

$$u_1 + u_2 + u_3 \dots$$

On a

$$\begin{aligned} u_{n-1} &< \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^4} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{12} \left[ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right]. \end{aligned}$$

On obtient, par addition,

$$S_{n-1} < \frac{1}{12} \left( 1 - \frac{1}{n} \right).$$

Donc  $S_{n-1}$  tend vers une limite  $S$ , inférieure à  $\frac{1}{12}$ . Les termes étant positifs, on a

$$(3) \quad S_{n-1} < S.$$

On obtient de même

$$S - S_{n-1} = u_n + u_{n+1} + \dots < \frac{1}{12n},$$

d'où

$$(4) \quad S_{n-1} > S - \frac{1}{12n}.$$

Des inégalités (3) et (4) il résulte que l'on peut poser

$$S_{n-1} = S - \frac{\theta}{12n},$$

$\theta$  étant compris entre 0 et 1.

IV. L'égalité (2) devient

$$l\varphi_n = n - 1 + S - \frac{\theta}{12n}.$$

On en conclut

$$\frac{1}{\varphi_n} = e^{1-S} e^{-n + \frac{\theta}{12n}}.$$

Substituant dans (1), on obtient

$$(5) \quad 1.2.3 \dots n = C n^{n + \frac{1}{2}} e^{-n + \frac{\theta}{12n}},$$

C étant la constante  $e^{1-S}$  à déterminer.

V. Soit

$$f(n) = \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{5} \frac{6}{7} \frac{8}{7} \dots \frac{2n}{2n-1}.$$

Une transformation facile donne

$$f(n) = \frac{2^{4n-1}}{n} \left[ \frac{(1.2.3 \dots n)^2}{1.2.3 \dots 2n} \right]^2.$$

Or, d'après la formule (5),

$$(1.2.3 \dots n)^2 = C^2 n^{2n+1} e^{-2n + \frac{\theta}{6n}},$$

$$1.2.3 \dots 2n = C(2n)^{2n + \frac{1}{2}} e^{-2n + \frac{\theta}{24n}}.$$

Donc

$$f(n) = \frac{C^2}{4} e^{\frac{4\theta - \theta}{12n}},$$

$\theta'$  étant, comme  $\theta$ , une fraction proprement dite.

Si  $n$  augmente indéfiniment

$$f(\infty) = \frac{C^2}{4}.$$

( 46 )

Mais, d'après la formule de Wallis,

$$f(\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent  $C = \sqrt{2\pi}$ .

VI. Donc, enfin,

$$(6) \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n + \frac{1}{12n}}.$$