NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 425-431
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__425_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1391

(voir 3e série, t. I, p. 142);

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

Soit k la courbe enveloppée par une droite de longueur constante dont les extrémités s'appuient sur deux droites fixes. Démontrer que toute courbe parallèle à k peut être engendrée de la même façon.

(LAGUERRE.)

AB de longueur constante, glissant entre OX et OY, enveloppe k. C étant le centre instantané de rotation, O, A, C, B sont sur une même circonférence de diamètre constant égal à $\frac{AB}{\sin XOY}$. La tangente correspondant à la courbe parallèle à k coupe cette circonférence en A′ et B′. La distance de A′B′ à AB étant constante, les arcs AA′ et BB′, et, par suite, les angles AOA′ et BOB′ sont constants; les droites OA′ et OB′ sont donc fixes. D'ailleurs

$$\frac{A'B'}{\sin A'OB'} = \frac{AB}{\sin XOY} = \text{const.}$$

Par conséquent A′B′ a une longueur constante, et le théorème est démontré.

Note. — La même question a été résolue par M. J. Mister, professeur à l'École du Génie civil de Belgique.

Question 1396

(voir 3e série, t. I, p. 192);

PAR M. FRANÇOIS BORLETTI,
Ingénieur à Milan.

Intégrer l'équation

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}-(1-2x)\frac{dy}{dx}+y(1-3x+x^2)=-x^2(1-x)^2.$$

(E. FAUQUEMBERGUE.)

L'équation caractéristique

$$x(1-x)r^2-(1-2x)r+1-3x+x^2=0,$$

correspondant à l'équation donnée dans laquelle on remplace le second membre par zéro, est satisfaite par

$$r=1;$$

en conséquence, l'équation

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}-(1-2x)\frac{dy}{dx}+y(1-3x+x^2)=0$$

admettra l'intégrale particulière $y=e^x$.

Alors, si l'on fait

$$(1)\qquad e^x\left(\frac{dy}{dx}-y\right)=z,$$

l'équation proposée devient

$$(2)\qquad \frac{dz}{dx}-\frac{1-2x}{x(1-x)}z=-e^x x(1-x).$$

L'intégrale générale de l'équation (2) est

$$z=x(1-x)(C-e^x),$$

et, par l'équation (1), l'intégrale générale de l'équation proposée devient

$$y = \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}x^2 e^{-x} - x(1+x) - 1,$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez, Charles Chabanel et Wladimir Habbé, à Odessa.

Question 1417

(voir 3e série, t. I, p. 334);

PAR M. CHARLES CHABANEL.

Le nombre p étant supposé premier, et les deux groupes,

$$r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_{p-1}$$

et

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_{p-1}$$

formant deux systèmes complets de résidus premiers par rapport au module p, il y a nécessairement deux indices différents i et k, tels que les produits $r_i s_i$ et $r_k s_k$ sont congrus par rapport au module p.

(A. HURWITZ.)

Chacun des groupes

$$r_1,\ r_2,\ \ldots\ r_{p-1},$$
$$s_1,\ s_2,\ \ldots\ s_{p-1}$$

est identique, à l'ordre près, au groupe

$$(1)\qquad 1.2.3\ldots p-1,$$

qui contient les $p-1$ entiers premiers et inférieurs à p. Il s'ensuit que les trois produits

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= 1.2.3\ldots(p-1), \\ \mathrm{P}' &= r_1 r_2 \ldots r_{p-1}, \\ \mathrm{P}'' &= s_1 s_2 \ldots s_{p-1} \end{aligned}$$

sont égaux.

Soit t_i le résidu de $r_i s_i$ par rapport au module p, tout produit rs étant premier à p, chacun des $p-1$ résidus

(2) $$t_1, t_2, \ldots, t_{p-1}$$

est égal à un entier du groupe (1). Nous avons maintenant à comparer ces résidus entre eux.

A cet effet, supposons que les entiers (2) soient distincts les uns des autres; le groupe qu'ils formeront sera alors identique, à l'ordre près, à celui (1), et leur produit sera égal à P. Or les produits

$$t_1 t_2 \ldots t_{p-1}$$

et

$$r_1 s_1 \times r_2 s_2 \times \ldots \times r_{p-1} s_{p-1}$$

sont congrus par rapport au module p, car tout facteur $r_i s_i$ du second produit est congru au facteur correspondant t_i du premier produit. L'hypothèse que nous avons faite a donc pour conséquence

$$\mathrm{P} \equiv r_1 s_1 \times r_2 s_2 \times \ldots \times r_{p-1} s_{p-1} \pmod{p},$$

ou

$$\mathrm{P} \equiv r_1 r_2 \ldots r_{p-1} \times s_1 s_2 \ldots s_{p-1} \pmod{p},$$

ce qui donne

$$\mathrm{P} \equiv \mathrm{P}'\mathrm{P}'' \pmod{p},$$

ou bien, à cause de $\mathrm{P} = \mathrm{P}' = \mathrm{P}''$,

$$\mathrm{P}^2 \equiv \mathrm{P} \pmod{p}.$$

Mais le produit P est évidemment premier au module; cette congruence ne peut donc subsister sans que l'on ait

$$\mathrm{P} \equiv +1 \pmod{p},$$

congruence impossible quand $p > 2$, car

$$1.2.3\ldots(p-1)+1 \quad \text{ou} \quad \mathrm{P}+1$$

est divisible par le nombre premier p (théorème de Wilson), c'est-à-dire que

$$\mathrm{P} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Cette impossibilité prouve que les résidus (2) ne peuvent pas être tous distincts les uns des autres : en conséquence, il y a nécessairement deux résidus qui sont égaux entre eux. Soient t_i et t_k ces résidus, on aura

$$r_i s_i \equiv r_k s_k \pmod{p}.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1429

(voir 3ᵉ série, t. I, p. 528);

PAR M. L. B., à Angers.

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = 8\,\frac{9}{8}\,\frac{24}{25}\,\frac{49}{48}\,\frac{80}{81}\,\frac{121}{120}\,\cdots \qquad \text{(Catalan.)}$$

On a (*Calcul intégral* de M. Bertrand, p. 247)

$$\Gamma(n) = \lim \mu^n \frac{1.2.3\ldots\mu}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+\mu)},$$

où μ est un nombre entier qui augmente indéfiniment. On tire de là facilement

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 4^{\mu+1}\frac{1.2.3\ldots\mu^{\frac{5}{4}}}{1.5.9.13\ldots(4\mu+1)};$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = 4^{\mu+1}\frac{1.2.3\ldots\mu^{\frac{7}{4}}}{3.7.11.15\ldots(4\mu+3)};$$

$$(1)\qquad \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = \frac{3^2.7^2.11^2.15^2\ldots(4\mu+3)^2}{1^2.5^2.9^2.13^2.17^2\ldots(4\mu+1)^2\mu}.$$

Mais évidemment

$$1 = \frac{4.8.12\ldots4(\mu-1)}{8.12.16\ldots(4\mu)}\times\mu,$$

ou

$$(2)\qquad 1 = \frac{(5-1)(9-1)\ldots(4\mu-3-1)}{(7+1)(11+1)\ldots(4\mu-1+1)}\times\mu,$$

quel que soit le nombre entier μ.

En multipliant le second membre de l'équation (2) par $\frac{5+1}{7-1}\cdot\frac{9+1}{11-1}\cdots$, facteur évidemment égal à l'unité, on a

$$(3)\qquad 1=\frac{(5^2-1)(9^2-1)\ldots[(4\mu-3)^2-1]}{(7^2-1)(11^2-1)\ldots[(4\mu-1)^2-1]}\times\mu.$$

Si, enfin, je multiplie les équations (1) et (3) membre à membre, j'obtiendrai, en disposant convenablement les facteurs,

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2=\frac{3^2}{1^2}\,\frac{5^2-1}{5^2}\,\frac{7^2}{7^2-1}\,\frac{9^2-1}{9^2}\,\frac{11^2}{11^2-1}\cdots,$$

ou bien, en multipliant par $\frac{8}{8}$ pour la symétrie,

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2=8\,\frac{9}{8}\,\frac{24}{25}\,\frac{49}{48}\,\frac{80}{81}\,\frac{121}{120}\cdots.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. Goffart et Cesaro.

Question 1459

(voir 2e série, t. II, p. 336);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

Le cube d'un nombre entier autre que l'unité ne peut être la somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs.

Soit

$$(1)\qquad y^3=x^2+(x+1)^2,$$

où x et y représentent des nombres entiers.

De l'équation (1) on déduit successivement

$$y^3=2x^2+2x-1,$$
$$8y^3=16x^2+16x+8=(4x+2)^2+4.$$

et en posant
$$2y = Y \quad \text{et} \quad 4x + 2 = X,$$
il vient
$$Y^3 = X^2 + 4.$$

Mais il est démontré dans la *Théorie des nombres* de Legendre (3e édition, 1830, t. II, p. 12) qu'une équation telle que
$$Y^3 = X^2 + 4$$
n'admet que les deux solutions entières
$$Y = 2, \quad X = 2 \quad \text{et} \quad Y = 5, \quad X = 11.$$

Par suite, les relations $2y = Y, 4x + 2 = X$ deviennent
$$2y = 2, \quad 4x + 2 = 2,$$
ou
$$2y = 5, \quad 4x + 2 = 11.$$

Le premier système donne
$$y = 1, \quad x = 0;$$
et le second, les valeurs fractionnaires
$$y = \frac{5}{2}, \quad x = \frac{9}{4}.$$

Donc l'équation
$$(1) \qquad y^3 = x^2 + (x + 1)^2$$
ne peut être vérifiée, en nombres entiers, que par $y = 1$ et $x = 0$. C. Q. F. D.