

A. PICART

**Note sur les équations linéaires aux dérivées
partielles, à deux variables indépendantes,
du deuxième et du troisième ordre**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 34-43

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_34_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DERIVÉES PARTIELLES, A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES, DU DEUXIÈME ET DU TROISIÈME ORDRE ;

PAR M. A. PICART.

1. Laplace a donné une méthode, qu'on pourrait appeler méthode *par cascades*, pour intégrer les équations linéaires du deuxième ordre ramenées préalablement à la forme

$$S + Pp + Qq = V.$$

Legendre a montré ensuite qu'on pourrait appliquer

directement la méthode à l'équation complète

$$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq = V.$$

Mais ses formules de transformation n'ont été obtenues qu'après coup comme extension de celles de Laplace, tandis qu'on peut les déduire immédiatement de l'équation même par le procédé suivant.

Nous avons cru notre méthode complètement nouvelle, mais, en parcourant le Chapitre du grand Traité de Lacroix, relatif aux équations différentielles partielles, nous avons vu que Legendre, voulant généraliser le procédé de Laplace, avait déjà été conduit à la même transformation. Seulement nous croyons pouvoir ajouter, d'après les indications de Lacroix, que sa méthode, basée sur une identification, et par conséquent indirecte, diffère complètement de la nôtre, qui tire sa transformation en quelque sorte du fond même de l'équation différentielle.

2. Soit l'équation linéaire du deuxième ordre à deux variables indépendantes

$$(1) \quad Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = V.$$

On peut la mettre sous la forme

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} R \frac{dp}{dx} + \alpha \frac{dq}{dx} + (S - \alpha) \frac{dp}{dy} + T \frac{dq}{dy} + \lambda \frac{dr}{dx} \\ \quad + \mu \frac{dz}{dy} + (P - \lambda)p + (Q - \mu)q + Zz = V, \end{array} \right.$$

α, λ, μ étant trois indéterminées.

Posons

$$(3) \quad \frac{R}{S - \alpha} = \frac{\alpha}{T} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{k}.$$

Ces équations détermineront α et μ ; λ seul restera indéterminé; α sera donné par l'équation du deuxième degré

$$(4) \quad \alpha^2 - S\alpha + RT = 0,$$

et μ sera égal à $k\lambda$; quant à k , sa valeur est $\frac{T}{\alpha}$ ou $\frac{S - \alpha}{R}$.

Introduisons une fonction auxiliaire X définie par l'équation

$$(5) \quad Rp + \alpha q + \lambda z = X,$$

d'où résulte, en vertu de l'équation (3),

$$(S - \alpha)p + Tq + \mu z = kX.$$

Ces deux dernières équations donnent

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} R \frac{dp}{dx} + \alpha \frac{dq}{dx} + \lambda \frac{dr}{dx} = \frac{dX}{dx} - \frac{dR}{dx}p - \frac{d\alpha}{dx}q - \frac{d\lambda}{dx}z, \\ (S - \alpha) \frac{dp}{dy} + T \frac{dq}{dy} + \mu \frac{dr}{dy} = k \frac{dX}{dy} + \frac{dk}{dy}X - \frac{d(S - \alpha)}{dy}p \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{dT}{dy}q - \frac{d\mu}{dy}z. \end{array} \right.$$

Par suite, l'équation (2) devient

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dx} + k \frac{dX}{dy} + \frac{dk}{dy}X - \frac{d(S - \alpha)}{dy} \left| \begin{array}{l} p + Q - \mu \\ - \frac{dR}{dx} \\ + P - \lambda \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} q - \frac{d\lambda}{dx} \\ - \frac{d\mu}{dy} \\ + Z \end{array} \right| z = V. \end{array} \right.$$

Remplaçons dans cette équation μ par $k\lambda$, $\frac{d\mu}{dy}$ par $k \frac{d\lambda}{dy} + \lambda \frac{dk}{dy}$, et p par sa valeur $\frac{X - \alpha q - \lambda z}{R}$, tirée de

l'équation (5), nous obtiendrons

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{dX}{dx} + k \frac{dX}{dy} + \left[\frac{dk}{dy} - \frac{\frac{dR}{dx} + \frac{d(S-\alpha)}{dy} - P + \lambda}{R} \right] X \\ & + \left[\frac{\alpha}{R} \left(\frac{dR}{dx} + \frac{d(S-\alpha)}{dy} - P + \lambda \right) - \frac{dx}{dx} - \frac{dT}{dy} + Q - k\lambda \right] q \\ & + \left[\frac{\lambda}{R} \left(\frac{dR}{dx} + \frac{d(S-\alpha)}{dy} - P + \lambda \right) - \frac{d\lambda}{dx} - k \frac{d\lambda}{dy} - \lambda \frac{dk}{dy} + Z \right] z = V. \end{aligned} \right.$$

Égalons à 0 le coefficient de q , nous aurons

$$(9) \quad \lambda = \frac{\frac{dx}{dx} - \frac{dT}{dy} - Q - \frac{\alpha}{R} \left[\frac{dR}{dx} + \frac{d(S-\alpha)}{dy} - P \right]}{\frac{\alpha}{R} - k},$$

et l'équation (8) se réduira à la forme

$$(10) \quad \frac{dX}{dx} + k \frac{dX}{dy} + MX + Nz = V,$$

en posant

$$(11) \quad M = \frac{dk}{dy} - \frac{\frac{dR}{dx} + \frac{d(S-\alpha)}{dy} - P + \lambda}{R},$$

$$(12) \quad N = \frac{\lambda}{R} \left[\frac{dR}{dx} + \frac{d(S-\alpha)}{dy} - P + \lambda \right] - \frac{d\lambda}{dx} - k \frac{d\lambda}{dy} - \lambda \frac{dk}{dy} + Z.$$

On peut simplifier les valeurs de λ , M , N . Faisons $R = 1$; ce qui suppose que le terme en r ne manque pas dans l'équation différentielle (1) et qu'on a divisé tous les termes par le coefficient de r ; alors k est égal à $S - \alpha$ et T à $\alpha(S - \alpha)$. En portant ces valeurs de T , k et R

dans les formules (9), (11), (12), on obtient

$$(13) \quad \lambda = \frac{\frac{dx}{dx} + (S - \alpha) \frac{dx}{dy} + P\alpha - Q}{2\alpha - S},$$

$$(14) \quad M = P - \lambda,$$

$$(15) \quad N = Z - \lambda(P - \lambda) + \frac{d\lambda}{dx} + k \frac{d\lambda}{dy}.$$

L'équation différentielle du deuxième ordre se trouve donc ainsi ramenée aux deux équations simultanées du premier ordre (5) et (10). On tirera de (10) la valeur de z et de ses dérivées p, q , on les portera dans (5) et on aura une équation du deuxième ordre en X de même forme que la proposée.

Si dans (10) le coefficient de z est nul, c'est-à-dire si $N = 0$, on aura à intégrer une équation du premier ordre en X ; et, en portant dans (5) la valeur trouvée de X , on aura une équation du premier ordre en z .

Lorsque N n'est pas nul, on peut appliquer à l'équation du second ordre en X une transformation analogue; et de même que l'équation du second ordre en z a été remplacée par les deux équations simultanées du premier ordre

$$(5) \quad \frac{dz}{dx} + \alpha \frac{dz}{dy} + \lambda z = X,$$

$$(10) \quad \frac{dX}{dx} + k \frac{dX}{dy} + MX + Nz = V,$$

dans lesquelles α et k sont les racines de l'équation

$$(4) \quad \alpha^2 + S\alpha + T = 0,$$

et λ, M, N ont les valeurs (13), (14), (15), on remplacera l'équation du deuxième ordre en X par les deux

équations

$$(16) \quad \frac{dX}{dx} + \alpha \frac{dX}{dy} + \lambda' X = X',$$

$$(17) \quad \frac{dX'}{dx} + k \frac{dX'}{dy} + M' X' + N' X = V',$$

dans lesquelles λ' , M' , N' ont de certaines valeurs dépendant de celles de α , k , λ , M , N . Lorsque N' sera nul, on obtiendra X' en intégrant l'équation du premier ordre

$$\frac{dX'}{dx} + k \frac{dX'}{dy} + M' X' = V';$$

l'intégration de l'équation (16) donnera X , et, par suite, on aura z en substituant cette valeur de X dans l'équation (10). Si N n'est pas nul, on formera deux nouvelles équations simultanées

$$(18) \quad \frac{dX'}{dx} + \alpha \frac{dX'}{dy} + \lambda'' x' = X'',$$

$$(19) \quad \frac{dX''}{dx} + k \frac{dX''}{dy} + M'' X'' + N'' X' = V'',$$

dans lesquelles λ'' , M'' , N'' ont de certaines valeurs déduites, suivant une loi constante, de α , k et des quantités précédentes λ' , M' , N' . Lorsqu'en continuant ainsi on tombera sur un système d'équations simultanées dans lequel le coefficient $N^{(i)}$ sera nul, on n'aura qu'à intégrer deux équations du premier ordre pour obtenir, par une série de substitutions, l'intégrale de l'équation proposée, avec deux fonctions arbitraires.

3. La méthode de transformation que nous venons de développer se trouve en défaut quand l'équation (4), qui donne la valeur de α , a ses racines égales, c'est-à-dire

quand $S^2 = 4RT$, car on ne peut plus disposer de λ dans l'équation (8) pour faire disparaître le terme en q , puisque le coefficient de λ , $2z - S$, est nul dans le multiplicateur de q .

4. On peut appliquer la même méthode à l'équation linéaire du troisième ordre

$$(20) \quad Uu + \mathbf{U}u + Vv + \mathbf{W}w + Rr \\ + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = \mathbf{H},$$

dans laquelle u, u, v, w désignent respectivement $\frac{d^3z}{dx^3}$, $\frac{d^3z}{dx^2dy}$, $\frac{d^3z}{dxdy^2}$, $\frac{d^3z}{dy^3}$. Pour cela, on mettra cette équation sous la forme suivante

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} U \frac{dr}{dx} + (\mathbf{U} - \alpha) \frac{dr}{dy} + \alpha \frac{ds}{dx} + (V - \beta) \frac{ds}{dy} + \beta \frac{dt}{dx} + \mathbf{W} \frac{dt}{dy} \\ + \lambda \frac{dp}{dx} + \varepsilon \frac{dp}{dy} + (\mu - \varepsilon) \frac{dq}{dx} + \gamma \frac{dq}{dy} + \theta \frac{dr}{dx} + \omega \frac{dr}{dy} \\ + (R - \lambda)r + (S - \mu)s + (T - \gamma)t + (P - \theta)p + (Q - \omega)q + Zz = \mathbf{H}, \end{array} \right.$$

$\alpha, \beta, \lambda, \mu, \varepsilon, \gamma, \theta, \omega$ étant des indéterminées; et on posera

$$(22) \quad Ur + \alpha s + \beta t + \lambda p + (\mu - \varepsilon)q + \theta z = X,$$

avec les équations de condition

$$(23) \quad \frac{U}{\mathbf{U} - \alpha} = \frac{\alpha}{V - \beta} = \frac{\beta}{\mathbf{W}} = \frac{\lambda}{\varepsilon} = \frac{\mu - \varepsilon}{\gamma} = \frac{\theta}{\omega} = \frac{1}{k},$$

d'où résulte

$$(24) \quad (\mathbf{U} - \alpha)r + (V - \beta)s + \mathbf{W}t + \varepsilon p + \gamma q + \omega z = kX.$$

L'équation (21) deviendra ainsi

$$(25) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dX}{dx} + k \frac{dX}{dy} + \frac{dk}{dy} X - \frac{d(UU-\alpha)}{dy} \right) r - \frac{d(V-\beta)}{dy} \left| s + (T-\gamma) \right| t + (P-\theta) \left| p - \frac{d(\mu-\varepsilon)}{dx} \right| q - \frac{d\theta}{dx} \left| z = \Pi, \right. \\ \left. \begin{array}{l} - \frac{dU}{dx} \\ - \frac{d\alpha}{dx} \\ + (R-\lambda) \end{array} \right| \begin{array}{l} - \frac{d\beta}{dx} \\ - \frac{dW}{dy} \\ + (S-\mu) \end{array} \right| \begin{array}{l} - \frac{d\lambda}{dx} \\ - \frac{d\varepsilon}{dy} \\ - \frac{d\gamma}{dy} \end{array} \left| \begin{array}{l} - \frac{d\theta}{dx} \\ - \frac{d\omega}{dy} \\ + Z \end{array} \right. \end{array} \right.$$

ou, en y portant la valeur de r tirée de l'équation (22),

$$(26) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dX}{dx} + k \frac{dX}{dy} - \frac{1}{U} \frac{d(UU-\alpha)}{dy} \right) X + \frac{\alpha}{U} \frac{d(UU-\alpha)}{dy} \left| s + \frac{\beta}{U} \frac{d(UU-\alpha)}{dy} \right| t + \frac{\lambda}{U} \frac{d(UU-\alpha)}{dy} \left| p + \frac{\mu-\varepsilon}{U} \frac{d(UU-\alpha)}{dy} \right| q + \frac{\theta}{U} \frac{d(UU-\alpha)}{dy} \left| z = \Pi. \right. \\ \left. \begin{array}{l} + \frac{dk}{dy} \\ - \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} \\ + \frac{R}{U} \\ - \frac{\lambda}{U} \\ - \frac{R\alpha}{U} \\ - \frac{\lambda\alpha}{U} \end{array} \right| \begin{array}{l} - \frac{d\alpha}{dx} \\ - \frac{d(V-\beta)}{dy} \\ + (S-\mu) \\ + \frac{\alpha}{U} \frac{dU}{dx} \\ - \frac{R\beta}{U} \\ - \frac{\lambda\beta}{U} \end{array} \right| \begin{array}{l} - \frac{d\beta}{dx} \\ - \frac{dW}{dy} \\ + (T-\gamma) \\ + \frac{\beta}{U} \frac{dU}{dx} \\ - \frac{R\beta}{U} \\ - \frac{\lambda\beta}{U} \end{array} \left| \begin{array}{l} - \frac{d\lambda}{dx} \\ - \frac{d\varepsilon}{dy} \\ + (P-\theta) \\ + \frac{\lambda}{U} \frac{dU}{dx} \\ - \frac{R\lambda}{U} \\ + \frac{\lambda^2}{U} \end{array} \right| \begin{array}{l} - \frac{d(\mu-\varepsilon)}{dx} \\ - \frac{d\gamma}{dy} \\ + (Q-\omega) \\ + \frac{\mu-\varepsilon}{U} \frac{dU}{dx} \\ - \frac{(\mu-\varepsilon)R}{U} \\ + \frac{(\mu-\varepsilon)\lambda}{U} \end{array} \left| \begin{array}{l} - \frac{d\theta}{dx} \\ - \frac{d\omega}{dy} \\ + Z \\ + \frac{\theta}{U} \frac{dU}{dx} \\ - \frac{R\theta}{U} \\ + \frac{\lambda\theta}{U} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (27)$$

Si l'on remplace dans cette équation ε par $k\lambda$, γ par $k(\mu - k\lambda)$ et ω par $k\theta$, il y restera trois indéterminées λ , μ et θ ; et l'on pourra en disposer généralement de manière à faire disparaître les termes en s , t , p . On aura ainsi une équation de la forme

$$(27) \quad \frac{dX}{dx} + k \frac{dX}{dy} + AX + Bq + Cz = H.$$

Si $B = 0$, on tirera de cette équation la valeur de z et de ses dérivées du premier et du deuxième ordre, et, en portant ces valeurs dans l'équation (22), on aura une équation linéaire du troisième ordre en X . Connaissant la fonction X , on aura z au moyen de l'équation (27).

Si B et C sont nuls, on aura à intégrer une équation de premier ordre en X , et, connaissant X , on déterminera z par l'équation du deuxième ordre (22).

5. Il existe une classe générale d'équations linéaires du troisième ordre pour lesquelles l'équation (27) manque du terme en q ; ce sont celles qui ne renferment pas, soit V , W , T , soit U , UU , R , c'est-à-dire les termes où la fonction z est différenciée plus d'une fois, soit par rapport à y , soit par rapport à x . En effet, lorsque $V = W = T = 0$, par exemple, les équations (23) donnent $\alpha = UU$, $\beta = 0$, $k = 0$, $\varepsilon = 0$, $\gamma = 0$, $\omega = 0$; par suite, dans l'équation (26), le coefficient de t est nul, et, en égalant à 0 les coefficients de s , p , q , on aura trois équations pour déterminer λ , μ , θ , savoir

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dx} - \frac{UU}{U} \left(\frac{dU}{dx} - R + \lambda \right) - S + \mu = 0, \\ \frac{d\lambda}{dx} - \frac{\lambda}{U} \left(\frac{dU}{dx} - R + \lambda \right) - P + \theta = 0, \\ \frac{d\mu}{dx} - \frac{\mu}{U} \left(\frac{dU}{dx} - R + \lambda \right) - Q = 0. \end{cases}$$

Le système d'équations à intégrer sera alors

$$(29) \begin{cases} Ur + Us + \lambda p + \mu q + \theta z = X, \\ \left[\frac{dX}{dx} - \frac{\lambda + \frac{dU}{dx} - R}{U} X + \left[Z - \frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{U} \left(\frac{dU}{dx} - R + \lambda \right) \right] \right] z = H, \end{cases}$$

et l'on voit que, en tirant de la seconde de ces équations la valeur de z pour la porter dans la première, on aura une équation du troisième ordre en X de même forme que la proposée, et à laquelle on pourra appliquer la même transformation. Nous ne développerons pas davantage cette méthode, qui est tout à fait analogue à celle que nous avons suivie pour l'intégration de l'équation linéaire du second ordre.