NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

X. ANTOMARI

Relations entre les distances du foyer d'une conique à quatre points ou à quatre tangentes [suite]

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 337-347

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__337_0>

RELATIONS ENTRE LES DISTANCES DU FOYER D'UNE CONIQUE A QUATRE POINTS OU A QUATRE TANGENTES

[SUITE (1)];

PAR M. X. ANTOMARI,
Professeur au lycée de Carcassonne.

II. — FOYERS DE L'HYPERBOLE.

17. Nous avons vu (théorème II) que, si un quadrilatère ABCD est inscrit dans une hyperbole, de telle sorte qu'il y ait deux points sur chaque branche, on a la relation

$$AD - A_2 D_2 = A_1 D_1 - A_3 D_3,$$

$A, A_1, \ldots$ ayant la même signification que dans le cas de l'ellipse.

Si le quadrilatère devient un parallélogramme, on a

$$A = A_1 = A_2 = A_3$$

et, par suite,

$$D - D_2 = D_1 - D_3.$$

Ainsi :

THÉORÈME XII. — *Si un parallélogramme est inscrit dans une hyperbole, la différence des distances d'un foyer à deux sommets opposés est égale à la différence des distances aux deux autres sommets.*

Or, si un parallélogramme est inscrit dans une hyperbole, les diagonales sont des diamètres. De là, cet autre énoncé :

La différence des distances d'un foyer aux extrémités d'un diamètre de l'hyperbole est constante.

(1) *Voir* même Tome, p. 193.

Disons encore que cette propriété est évidente quand on part de la définition géométrique de l'hyperbole.

Remarquons maintenant que, si F est un foyer, le point F′, symétrique par rapport au centre, est aussi un foyer. Soient alors F et F′ ces deux foyers et MM′ un diamètre (*fig.* 9). On a

$$FM' - FM = K,$$

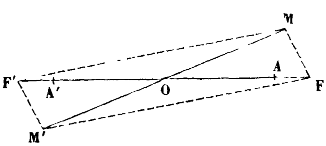
et, par suite,

$$MF' - MF = K.$$

D'où :

Théorème XIII. — *La différence des distances d'un*

Fig. 9.



point quelconque de l'hyperbole aux deux foyers est constante.

Partant de là, on pourra raisonner comme pour l'ellipse et prouver :

1° *Que la tangente en un point fait des angles égaux avec les rayons vecteurs allant des foyers au point de contact;*

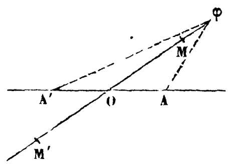
2° *Que les foyers doivent être sur l'un des axes, car ils doivent être sur un diamètre normal à la courbe.*

Ils ne peuvent, d'ailleurs, pas être sur l'axe non transverse : ils seront donc sur l'axe transverse.

18. On peut arriver plus directement aux mêmes con-

clusions. Soit, en effet, φ un foyer situé sur un diamètre

Fig. 10.



quelconque MM' de l'hyperbole (*fig.* 10), et soit AA' l'axe transverse.

La différence des distances aux extrémités d'un diamètre étant constante, on doit avoir

$$MM' = \varphi M' - \varphi M = \varphi A' - \varphi A.$$

Or, dans le triangle $A\varphi A'$, on a

$$AA' > \varphi A' - \varphi A,$$

c'est-à-dire

$$AA' > MM',$$

ce qui est impossible, puisque AA' est le diamètre minimum : donc les foyers sont sur l'axe transverse, et la différence constante est égale à cet axe.

Si alors la longueur de l'axe non transverse est donnée, on construira les foyers par le procédé ordinaire.

19. Supposons que l'on donne un diamètre quelconque en grandeur et en direction, et que l'on donne aussi la grandeur et la position de l'axe transverse : il est facile de construire les foyers.

Désignons par $2a$ l'axe transverse et par MM' le diamètre; F étant un foyer, on aura

$$FM - FM' = 2a;$$

par conséquent l'hyperbole, qui a pour foyers M et M' et pour longueur de l'axe transverse $2a$, passe par le point F.

Le problème précédent est alors ramené à trouver les points de rencontre d'une droite avec une hyperbole, problème que l'on sait résoudre.

Remarque. — On traiterait d'une manière analogue le problème correspondant pour l'ellipse.

III. — Foyer de la parabole.

20. Nous avons vu précédemment que si D_1, D_2, D_3 sont les distances de trois points d'une parabole au foyer, on a (théorème V)

$$d^2(D_3 - D_2)(D_3 - D_1) \\ + b^2(D_1 - D_2)(D_1 - D_3) + c^2(D_2 - D_1)(D_2 - D_3) = 4S^2,$$

b, c, d désignant les côtés du triangle formé par les trois points et S la surface de ce triangle.

Supposons $D_1 = D_2$. La relation précédente devient

$$d^2(D_3 - D_2)^2 = 4S^2 \quad \text{ou} \quad 2S = \pm d(D_3 - D_2).$$

On prendra le signe $+$ si $D_3 > D_2$, le signe $-$ dans le cas contraire.

Or, si l'on désigne par h la hauteur correspondant au côté d, on a

$$2S = dh$$

et, par suite,

$$h = \pm(D_3 - D_2).$$

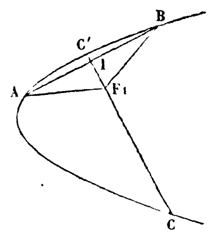
Ainsi :

Théorème XIV. — *Si deux points d'une parabole sont équidistants du foyer et si, par un troisième point quelconque, on mène la perpendiculaire sur la droite qui joint les deux premiers, cette perpendiculaire est égale à la différence des distances du foyer au troisième point et à l'un des deux autres.*

21. C'est à l'aide de cette propriété que nous allons déterminer le foyer de la parabole. Démontrons d'abord que le foyer doit être sur l'axe.

Première démonstration. — Supposons que le foyer soit un point quelconque F_1 (*fig.* 11) pris à l'intérieur

Fig. 11.



de la parabole : nous avons prouvé qu'il ne peut être à l'extérieur.

Soient A et B deux points équidistants du point F_1. Menons F_1I perpendiculaire sur le milieu de AB : cette perpendiculaire rencontrera la parabole en deux points C et C', puisque CC' n'est pas l'axe. D'après le théorème XIV, on doit avoir

$$CI = CF_1 - AF_1,$$

ce qui est impossible, à moins que le point C ne soit à l'infini et alors CC' serait l'axe, et le foyer serait sur l'axe.

Deuxième démonstration. — Soient F_1 le foyer, A et B deux points équidistants de F_1, M un point quelconque de la parabole et MP la perpendiculaire abaissée de ce point sur AB (*fig.* 12). On devra avoir

$$MP = MF_1 - AF_1.$$

Pour un autre point quelconque M', on devrait avoir aussi

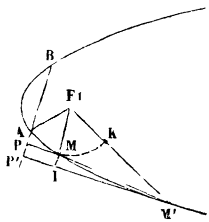
$$M'P' = M'F_1 - AF_1.$$

En retranchant membre à membre, il vient

$$M'P' - MP = M'F_1 - MF_1.$$

Menons MI parallèle à AB et décrivons l'arc MK du

Fig. 12.



point F_1 comme centre. L'égalité précédente montre que

$$M'I = M'K.$$

Partant de là, on démontrera par le procédé ordinaire que la tangente à la courbe au point M est également inclinée sur MP et sur MF_1.

Or A et B sont deux points quelconques équidistants de F_1 ; pour un autre couple de points A' et B' équidistants de F_1, on devra avoir la même relation : ce qui exige évidemment que AB et A'B' soient parallèles. Mais alors la perpendiculaire abaissée du foyer sur AB est un axe de symétrie et, par suite, le foyer est sur l'axe.

Il nous reste à déterminer sa position.

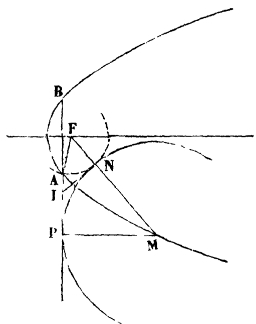
22. Soient F le foyer supposé connu et AB une corde perpendiculaire à l'axe (*fig.* 13).

Prenons un point quelconque M et menons MP perpendiculaire à AB. On aura

$$MP = MF - AF.$$

Du point M comme centre décrivons la circonférence

Fig. 13.



de rayon MP et joignons M et F. On aura alors

$$FN = AF.$$

On voit facilement, d'après cela, que la détermination du foyer est ramenée au problème suivant :

Décrire une circonférence passant par deux points donnés A *et* B *et tangente à une circonférence donnée.*

On sait que ce problème se ramène lui-même à la détermination du point I, et il est à remarquer que la construction donne un second foyer à l'infini, puisque MP est parallèle à l'axe.

Remarque. — Nous n'avons pas parlé de la détermination des directrices, parce que, les foyers étant déterminés, les directrices s'en déduisent immédiatement.

23. En dehors de la détermination des foyers, les théorèmes I et II peuvent recevoir d'autres applications.

Considérons, par exemple, la relation

$$AD - A_1 D_1 + A_2 D_2 - A_3 D_3 = 0.$$

Désignons par δ, δ_1, δ_2, δ_3 les distances respectives des quatre points à la directrice. On a

$$D = K\delta, \quad D_1 = K\delta_1, \quad D_2 = K\delta_2, \quad D_3 = K\delta_3.$$

En remplaçant, il vient, après la suppression du facteur K,

$$A\delta - A_1\delta_1 + A_2\delta_2 - A_3\delta_3 = 0$$

ou

$$(14) \qquad A\delta + A_2\delta_2 = A_1\delta_1 + A_3\delta_3.$$

Remarquons maintenant que les quatre points considérés ont une position indépendante à l'égard de la directrice. Rien dans la relation (14) n'indique que les quatre points appartiennent à une conique ayant pour directrice la droite considérée. En d'autres termes, l'égalité (14) a lieu pour un quadrilatère convexe quelconque situé du même côté par rapport à une droite.

Ainsi :

Théorème XV. — *Étant donnés un quadrilatère convexe plan et une droite située dans son plan et ne rencontrant pas sa surface, si l'on multiplie la distance de chaque sommet à la droite par l'aire du triangle formé par les trois autres, la somme des produits correspondant à deux sommets opposés est égale à la somme des deux autres.*

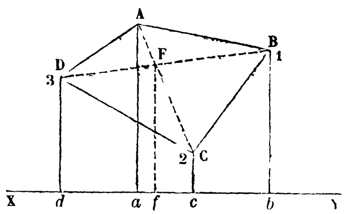
On voit sans peine quels seraient les théorèmes analogues dans les autres cas.

On voit aussi sans peine comment on pourrait comprendre les divers énoncés en un seul.

24. Enfin on peut arriver directement aux mêmes conclusions. Considérons, par exemple, le quadrilatère convexe ABCD et l'axe XY (*fig.* 14).

Imaginons que l'on applique en A une force perpendiculaire au plan du quadrilatère et égale à l'aire du triangle BCD; au point B une force égale à l'aire du triangle ACD, etc. Considérons d'abord les forces A_1 et

Fig. 14.



A_2 appliquées en A et C. Le théorème des moments, appliqué à ces forces, donne

$$A \times Aa + A_2 \times Cc = (A + A_2)z,$$

en désignant par z la distance à XY du point d'application de la résultante.

Or les deux triangles BCD et ABD, ayant même base, sont entre eux comme les longueurs CF et AF, c'est-à-dire que l'on aura

$$\frac{A}{A_2} = \frac{CF}{AF}.$$

Le point F est donc le point d'application de la résultante, et $z = Ff$; par suite,

$$A \times Aa + A_2 \times Cc = (A + A_2)Ff.$$

On aurait de même

$$A_1 \times Bb + A_3 \times Dd = (A + A_2)Ff;$$

d'où

$$A \times Aa + A_2 \times Cc = A_1 \times Bb + A_3 \times Dd.$$

25. Les résultats précédents peuvent être formulés, d'une manière générale, comme il suit :

Théorème XVI. — *Soient* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *n points appartenant à une conique*, $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$ *les dis-*

tances respectives au foyer; si l'on a la relation homogène $f(D_1, D_2, \ldots, D_n) = 0$, *on aura aussi*

$$f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = 0,$$

$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ *désignant les distances respectives de* n *points quelconques d'un plan à une droite quelconque de ce plan.*

Désignons en effet par $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ les distances des n points considérés à la directrice correspondante. On aura

$$D_1 = K\delta_1, \quad D_2 = K\delta_2, \quad \ldots, \quad D_n = K\delta_n,$$

$$(15) \qquad f(D_1, D_2, \ldots, D_n) = K^p f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = 0,$$

p désignant le degré d'homogénéité.

Or, dans cette équation, la conique n'intervient que par la quantité constante K qui n'est pas nulle et qui disparaît. On a donc, pour tout système de n points et par rapport à une droite quelconque du plan des n points,

$$f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = 0.$$

La réciproque est évidente.

26. Théorème XVII. — Relation entre quatre coniques circonscrites a un quadrilatère. — *Lorsque quatre coniques sont circonscrites à un quadrilatère, il y a une relation homogène et du quatrième degré entre les distances de quatre foyers aux sommets du quadrilatère.*

Soit ABCD le quadrilatère. Nous désignerons les sommets par (1), (2), (3), (4). Soit C_i une conique circonscrite au quadrilatère et dont les distances d'un foyer aux sommets sont x_i, y_i, z_i, u_i.

Supposons que i varie de 0 à 3, et que les quatre coniques obtenues soient du même genre. On aura les quatre équations

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{l} A x - A_1 y + A_2 z - A_3 u = 0, \\ A x_1 - A_1 y_1 + A_2 z_1 - A_3 u_1 = 0, \\ A x_2 - A_1 y_2 + A_2 z_2 - A_3 u_2 = 0, \\ A x_3 - A_1 y_3 + A_2 z_3 - A_3 u_3 = 0. \end{array}\right.$$

L'élimination de A, A_1, A_2, A_3 donne

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z & u \\ x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est la relation cherchée. Elle donne le lieu géométrique des foyers des coniques circonscrites à un quadrilatère. La recherche de ce lieu aurait présenté bien plus de difficultés si elle avait été faite autrement. Nous nous proposons de revenir plus tard sur cette équation, s'il y a lieu.

En particulier, si l'une des coniques est un cercle, par exemple C_3, on aura

$$x_3 = y_3 = z_3 = u_3,$$

et la relation (17) devient

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z & u \\ x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est la relation (1) dans laquelle les coordonnées des sommets du quadrilatère ont été remplacées par les distances de ces sommets aux foyers de C_1 et de C_2.

(A suivre.)