Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 322-333

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__322_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1410

(voir 3e série, t. I, p. 376),

PAR M. MORET-BLANC.

Étant donné un contour polygonal inscrit dans une parabole et tel que les projections de ses côtés sur la directrice soient égales, on mène par chacun de ses sommets une parallèle P *à l'axe de la parabole, puis on prolonge tous les côtés du contour dans le même* *sens jusqu'à la première* P *qu'ils rencontrent. Tous les segments ainsi déterminés sur les lignes* P *sont égaux.*

(D'OCAGNE.)

Soient

$$y^2 = 2px$$

l'équation de la parabole, k la projection de chaque côté du contour sur la directrice; x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 les coordonnées de trois sommets consécutifs. L'équation de la droite qui joint les deux derniers est

$$(y_3 - y_2)x - (x_3 - x_2)y + x_3 y_2 - x_2 y_3 = 0$$

ou, en remplaçant x_2 et x_3 par $\frac{y_2^2}{2p}$ et $\frac{y_3^2}{2p}$ et divisant par $y_3 - y_2$,

$$x - \frac{y_2 + y_3}{2p} y + \frac{y_2 y_3}{2p} = 0;$$

d'où l'on tire, pour l'abscisse du point où elle rencontre la droite P passant par x_1, y_1,

$$x = \frac{1}{2p}(y_1 y_2 + y_1 y_3 - y_2 y_3)$$

et, pour le segment compris entre ce point et la parabole,

$$x_1 - x = \frac{1}{2p}(y_1^2 - y_1 y_2 - y_1 y_3 + y_2 y_3).$$

En remplaçant y_2 et y_3 par leurs valeurs $y_1 + k$, $y_1 + 2k$ (en supposant y croissant avec l'indice), il vient

$$x_1 - x = \frac{k^2}{p},$$

valeur indépendante de l'indice.

Si les côtés étaient prolongés dans le sens opposé, il suffirait de changer le signe de k, ce qui ne modifie pas le résultat.

Question 1413

(voir 3e série, t. I, p. 383);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Professeur au lycée de Nice.

Si, par un point quelconque M *de la sécante commune à deux coniques homothétiques, on mène une droite quelconque* AB *coupant la première en* A *et* B, *la seconde en* A′ *et* B′, *les produits* MA × MB *et* MA′ × MB′ *seront égaux*. (P. BARBARIN.)

Menons dans les coniques les diamètres COD, C′O′D′ parallèles à la sécante commune IMK, et les diamètres EOF, E′O′F′ parallèles à la droite variable AB (1). D'après le théorème de Newton, on a

$$\frac{MA \times MB}{MI \times MK} = \frac{OE \times OF}{OC \times OD} = \frac{\overline{OE}^2}{\overline{OC}^2};$$

de même

$$\frac{MA' \times MB'}{MI \times MK} = \frac{\overline{O'E'}^2}{\overline{O'C'}^2}.$$

Or, les coniques étant homothétiques, on a

$$\frac{OE}{OC} = \frac{O'E'}{O'C'};$$

donc

$$MA \times MB = MA' \times MB'.$$

C. Q. F. D.

Note. — Solutions analogues de MM. Moret-Blanc; Berthelet, élève au Lycée de Moulins; Adrien Paluz, élève à l'École Polytechnique de Zurich.

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

Question 1418

(voir 3e série, t. I, p. 431);

PAR M. LEZ.

On donne une ellipse de demi-axes OA, OB *et deux circonférences concentriques à l'ellipse, et de rayons* r, R; $r = \mathrm{OB}$. *Une droite issue du centre* O, *commun aux trois courbes, coupe les circonférences* r, R *en des points* C, D *par lesquels on mène des parallèles à* OA *dirigées dans le sens* OA. *La première rencontre l'ellipse au point* E, *la seconde est rencontrée en un point* F *par la normale à l'ellipse en* E; *trouver le lieu géométrique du point* F. (E. LEBON.)

Une droite $y = mx$ issue du centre commun O rencontre les cercles $x^2 + y^2 = r^2$ et $x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2$ en des points C et D ayant pour ordonnées $y = \dfrac{mr}{\sqrt{1+m^2}}$, $y = \dfrac{m\mathrm{R}}{\sqrt{1+m^2}}$.

La parallèle CE à l'axe focal rencontre l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

au point E ayant pour abscisse

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2(1+m^2) - r^2m^2}{1+m^2}}.$$

Les coordonnées de ce point E deviennent

$$x = \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}, \quad y = \frac{mb}{\sqrt{1+m^2}},$$

quand $r = b = \mathrm{OB}$.

La normale en E, représentée par

$$y - \frac{mb}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{am}{b}\left(x - \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right),$$

rencontre la droite DF, où

$$(1) \qquad y = \frac{mR}{\sqrt{1+m^2}},$$

en un point F ayant pour abscisse

$$(2) \qquad x = \frac{bR + a^2 - b^2}{a\sqrt{1+m^2}} = \frac{bR + c^2}{a\sqrt{1+m^2}}.$$

Éliminant la variable m entre les équations (1) et (2), on aura l'équation du lieu décrit par le point F ; on obtient ainsi une ellipse

$$\frac{a^2x^2}{(c^2+bR)^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$$

concentrique à l'ellipse donnée ([1]).

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Léon Rousset, élève du Lycée de Lyon; et par un anonyme.

Question 1421

(voir 3e série, t. I, p. 432);

PAR M. VICTOR DE STRÉKALOF, à Saint-Pétersbourg.

Soient AOD, BOE, COF *les trois hauteurs et* G *le centre de gravité d'un triangle* ABC; *démontrer que les cercles circonscrits aux triangles* AGD, BGE, CGF *se coupent en un second point qui est l'intersection de la droite* OG, *et de l'axe radical du cercle circonscrit au triangle* ABC, *et du cercle des neuf points de ce triangle.* (Rev. G. RICHARDSON, M.-A.)

On sait que les polaires d'un même point, relatives aux trois angles d'un triangle, vont rencontrer respecti-

---

([1]) Cette ellipse devient un cercle lorsque $R = a + b$.

vement les côtés opposés en trois points situés en ligne droite (Chasles, *Géométrie supérieure*, 2e édit., 1880, p. 257). De plus, si ce point est le point O de concours des hauteurs du triangle ABC, la droite mentionnée sera l'axe radical du cercle circonscrit au triangle et du cercle des neuf points de ce triangle.

En effet, soient F′ le point de rencontre du côté AB avec la polaire de O, relative à l'angle opposé C, et C′ le milieu de AB ([1]). On a

$$\text{(1)} \qquad F'B.FA = F'A.BF;$$

d'où l'on tire successivement

$$F'B(BA - BF) = (F'B + BA).BF,$$
$$F'B.BA = 2F'B.BF + 2.BC'.BF. = 2(F'B.BF + BC'.BF);$$
$$\tfrac{1}{2}F'B.BA = F'B.BF + BC'.BF.;$$
$$F'B.BA = \tfrac{1}{2}F'B.BA + F'B.BF. + BC'.BF.;$$
$$F'B.BA = F'B.BC' + F'B.BF + BC'.BF;$$

et, en ajoutant $F'B^2$ de part et d'autre, on aura

$$\begin{aligned} F'B(F'B + BA) &= F'B(F'B + BC') + BF(F'B + BC'), \\ &= (F'B + BF)(F'B + BC'), \end{aligned}$$

d'où

$$\text{(2)} \qquad F'B.F'A = F'F.F'C',$$

ce qui veut dire que le point F′ est situé sur l'axe radical des deux circonférences considérées ([2]). On verra de la même manière que le point D′ de rencontre du côté BC avec la polaire de O, relative à l'angle A, est sur la même

---

([1]) Le lecteur est prié de faire la figure. Le point F′ est l'intersection des droites ED, AB prolongées; les points F′, F sont conjugués harmoniques de A, B.

([2]) Car les points A, B appartiennent au cercle circonscrit au triangle ABC, et les points F, C′ à la circonférence des neuf points de ce triangle.

droite; donc les polaires du point O, relatives aux trois angles du triangle ABC, rencontrent respectivement les côtés opposés en des points qui appartiennent à l'axe radical des deux circonférences.

Pour construire l'axe radical, il suffit de prolonger la droite ED jusqu'à la rencontre de AB au point F' et d'abaisser de F' une perpendiculaire F'R sur la droite OG, qui est, comme on sait, la ligne des centres du cercle circonscrit et du cercle des neuf points.

Cela posé, on a, d'après la relation (2),

$$F'F(F'F - FC') = (F'F - FB)(F'F - FA),$$

d'où

$$F'F.FC' = F'F.FA - FB.F'A;$$

mais, d'après la relation (1),

$$FB.F'A = F'B.FA.;$$

donc

$$F'F.FC' = F'F.FA - F'B.FA = FA(F'F - F'B),$$

d'où

$$F'F.FC' = FA.FB. \tag{3}$$

Or, les triangles semblables ACF, BOF donnent

$$FA.FB = CF.OF;$$

donc

$$F'F.FC' = CF.OF, \quad \text{ou} \quad \frac{F'F.}{OF} = \frac{CF}{FC'}.$$

Cette dernière égalité montre que les triangles rectangles F'FO, CFC' sont semblables, et, par conséquent, l'angle OF'F = l'angle FCC'. Mais le quadrilatère OFF'R étant inscriptible, les angles OF'F, ORF sont égaux entre eux, comme inscrits dans un même segment du cercle décrit sur OF' comme diamètre. Donc l'angle

$$ORF = FCC'. = FCG.$$

Il s'ensuit que les quatre points C, G, F, R appartiennent à un même cercle; donc la circonférence circonscrite au triangle CGF passe par le point R de rencontre de la droite OG et de l'axe radical F'R dont il s'agit.

On démontrerait de même que les cercles circonscrits aux triangles AGD, BGE passent par le point R : le théorème proposé est donc démontré.

Note. — M. Moret-Blanc a donné une démonstration fondée sur les formules de la Géométrie analytique.

Question 1422

(voir 3e série, t. I, p. 432);

PAR M. ROMERO, à Madrid.

Tout nombre dont le carré se compose des carrés de deux nombres entiers consécutifs est égal à la somme des carrés de trois nombres entiers dont deux, au moins, sont consécutifs. (G.)

Les solutions en nombres entiers de l'équation

$$X^2 = Y^2 + Z^2 \tag{1}$$

sont données par les formules

$$X = a^2 + b^2, \quad Y = a^2 - b^2, \quad Z = 2ab,$$

où a et b représentent des nombres entiers.

Si les nombres Y, Z ont une différence égale à l'unité, on a

$$a^2 - b^2 - 2ab = \pm 1.$$

I. En prenant le signe + devant 1, il vient

$$(a + b)^2 = 2a^2 - 1,$$

c'est-à-dire que $a + b$ et a sont une solution de l'équation

$$x^2 = 2y^2 - 1. \tag{2}$$

Posons

$$x = a + b \quad \text{et} \quad y = a;$$

l'équation (2) peut être mise sous la forme

$$y^2 = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2}+1\right)^2.$$

Le nombre $\frac{x-1}{2}$ est entier, puisque x est impair.

On a, par suite,

$$(3) \qquad X = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2}+1\right)^2 + (x-y)^2 \quad (^1).$$

II. En prenant le signe —, la relation

$$a^2 - b^2 - 2ab = \pm 1$$

donne

$$(a-b)^2 = 2b^2 - 1$$

et, en posant $a - b = x$ et $b = y$,

$$x^2 = 2y^2 - 1,$$

$$y^2 = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2}+1\right)^2,$$

d'où

$$(4) \qquad X = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2}+1\right)^2 + (x+y)^2 \quad (^2).$$

Les relations (3) et (4) démontrent la proposition.

Note. — Autres démonstrations de MM. Fauquembergue, C. Chabanel, F. Borletti.

---

[1] Ou, en remplaçant x et y par leurs valeurs $a+b$ et a,

$$X = \left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b-1}{2}+1\right)^2 + b^2.$$

[2] $$X = \left(\frac{a-b-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b-1}{2}+1\right)^2 + a^2.$$

Question 1425

(voir 3e série, t. I, p. 480),

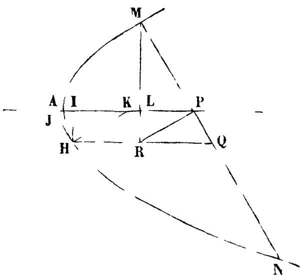
PAR M. N. GOFFART.

La normale en M *à une parabole rencontre cette courbe en un second point* N *et son axe en* P. *Par le point* Q *milieu de* MN, *on mène une parallèle à l'axe de la parabole, et du point* M *on abaisse la perpendiculaire* MR *sur cette droite :*

1° *Démontrer que* PR *est perpendiculaire à* MN;

2° *Trouver le lieu géométrique du point* R *lorsque le point* M *se déplace sur la parabole.* (CHAMBON.)

1° La parallèle QH à l'axe est le diamètre conjugué à la direction MN. Donc la tangente HJ au point H, est parallèle à MN, et la normale en H est perpendiculaire à MN. Or les sous-normales IK et LP sont égales au paramètre p. Donc les triangles rectangles RLP et HIK



sont égaux; par suite, RP est parallèle à HK, c'est-à-dire perpendiculaire à MN.

2° Dans le triangle rectangle MPR, on a

(1) $$LP^2 = ML.LR.$$

Or

$$ML^2 = 2p.AL.$$

Donc

$$LP^4 = 2p.AL.LR^2;$$

et si l'on fait

$$AL = x, \quad LR^2 = y^2,$$

on aura pour *l'équation du lieu du point* R

$$y^2 = \frac{p^3}{2x}. \tag{2}$$

La formule (1) montre que le paramètre de la parabole est moyen proportionnel entre les ordonnées de la parabole et du lieu (2), correspondantes à la même abscisse.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Lez; Rénoy, à Bordeaux; Choudadow, à Stawropol, au Caucase; Ch. Laurans, élève au lycée de Lyon; A. Percerou, élève au lycée de Besançon; L. Rousset, élève au lycée de Lyon; Giat et Berthelet, élèves au lycée de Moulins; Ch. Robinel et U. Génin, élèves au lycée de Bar-le-Duc; A. Barès, élève au lycée de Toulouse; et par un anonyme.

Question 1434

(voir 2e série, t. II, p. 144);

PAR M. GIAT,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Moulins
(classe de M. Marchand).

L'angle de deux hyperboles équilatères, concentriques, est double de l'angle de leurs asymptotes.

(E. CESARO.)

Soient OA, OB, et OA′, OB′ les asymptotes des deux hyperboles; P un de leurs points d'intersection; PA, PA′ leurs tangentes en ce point, qui rencontrent respectivement en A et A′ les asymptotes OA, OA′ dont l'angle A′OA est aigu ([1]).

([1]) Le lecteur est prié de faire la figure.

On sait que le segment de tangente, compris entre les deux asymptotes d'une hyperbole, est partagé en deux parties égales au point de contact. Les hyperboles considérées étant équilatères, on en conclut facilement que $PA = PO = PA'$. Il en résulte que les trois points O, A, A' sont sur une circonférence dont P est le centre. Or, dans cette circonférence, l'angle APA' a pour mesure l'arc AA', tandis que l'angle inscrit AOA' a pour mesure la moitié de cet arc. Donc

$$APA' = 2 AOA'.$$

C. Q. F. D.

Note. — M. Berthelet, élève du lycée de Moulins, a donné, de même, une démonstration géométrique très simple de la proposition énoncée.

La même question a été résolue au moyen de calculs par MM. E. Barisien, lieutenant au 141e d'infanterie, en Algérie; A. Goffart; C. Whiteken, élève à l'université de Pensylvanie, à Philadelphie; et par un anonyme.