

EDMOND LEVAIRE

Concours d'admission à l'École centrale (première session, 1882)

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 311-317

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_311_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

(PREMIÈRE SESSION, 1882).

SOLUTION DE M. EDMOND LEVAIRE,

Élève du pensionnat Notre-Dame-du-Sacré-Cœur.

Géométrie analytique.

Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes; et soient α, β les coordonnées d'un point P situé dans le plan de cette ellipse.

Former l'équation générale des coniques qui passent par les points de contact M et M' des tangentes menées du point P à l'ellipse, et par les points Q et Q', où cette ellipse est rencontrée par la droite

$$\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} + \mu = 0.$$

Disposer du paramètre μ et de l'autre paramètre variable que contient l'équation générale, de manière qu'elle représente une hyperbole équilatère, passant par le point P.

On fait mouvoir le point P sur la droite représentée par l'équation $x + y = l$, et l'on demande :

1° Le lieu décrit par la projection du centre de l'ellipse sur la droite QQ';

2° Le lieu décrit par le point de rencontre des cordes MM' et QQ'.

Démontrer que ce dernier lieu passe par deux points fixes, quel que soit l , et déterminer ces points. Chercher pour quelles valeurs de l ce lieu se réduit à deux droites et déterminer ces droites.

I. La droite MM' est la polaire du point P , par rapport à l'ellipse; son équation est

$$(1) \quad \frac{xx}{a^2} + \frac{yy}{b^2} - 1 = 0.$$

La droite QQ' a pour équation

$$(2) \quad \frac{xx}{a^2} - \frac{yy}{b^2} + \mu = 0.$$

Donc, l'équation générale des coniques passant par les points d'intersection de ces deux droites avec l'ellipse est

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 + \lambda \left(\frac{xx}{a^2} + \frac{yy}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{xx}{a^2} - \frac{yy}{b^2} + \mu \right) = 0$$

ou

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\lambda x^2}{a^4} \right) x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{\lambda y^2}{b^4} \right) y^2 + \frac{\lambda x}{a^2} (\mu - 1)x + \frac{\lambda y}{b^2} (\mu + 1)y - (\lambda \mu + 1) = 0.$$

La condition pour que cette équation représente une hyperbole équilatère est

$$\frac{1}{a^2} + \frac{\lambda x^2}{a^4} = - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{\lambda y^2}{b^4} \right) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \lambda \left(\frac{x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^4} \right) = 0,$$

ce qui exige que

$$\lambda = \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{a^4 b^2 - b^4 a^2} \quad (1).$$

(1) Si $a^4 b^2 - b^4 a^2 = 0$, λ est infini, et l'équation (3) représente le système des deux droites MM' , QQ' . Dans ce cas particulier, il n'y a, en réalité, aucune hyperbole équilatère passant par les points M , M' , Q , Q' . C'est, d'ailleurs, ce qu'il est facile de démontrer sans avoir recours à l'équation (3).

En effet, les coefficients angulaires des droites MM' , QQ' , étant égaux, et de signes contraires, les points M , M' , Q , Q' où l'ellipse est rencontrée par ces deux droites appartiennent à une même circonférence. Il en résulte que toute conique circonscrite au qua-

Pour que l'hyperbole passe par le point P, il faut la condition

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 + \lambda \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} + \mu \right) = 0,$$

ou bien, en réduisant,

$$\lambda \left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} \right) + \lambda \mu + 1 = 0.$$

Remplaçant λ par sa valeur, il vient

$$a^2 b^2 \frac{a^2 + b^2}{a^4 \beta^2 - b^4 \alpha^2} \left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} \right) + a^2 b^2 \frac{a^2 + b^2}{a^4 \beta^2 - b^4 \alpha^2} \mu + 1 = 0;$$

de cette équation on tire

$$\mu = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{a^2 + b^2}.$$

Les conditions cherchées sont donc

$$\lambda = a^2 b^2 \frac{a^2 + b^2}{a^4 \beta^2 - b^4 \alpha^2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{a^2 + b^2}.$$

II. Pour trouver :

1° *Le lieu décrit par la projection du centre de l'ellipse*

drilatère MM'QQ' a des axes respectivement parallèles à ceux de l'ellipse, c'est-à-dire parallèles aux axes de coordonnées. Que si la conique circonscrite au quadrilatère MM'QQ' est une hyperbole équilatère, ses asymptotes seront parallèles aux bissectrices des angles que forment les axes de coordonnées en se coupant au centre de l'ellipse. Or, lorsque $a^4 \beta^2 - b^4 \alpha^2 = 0$, la droite MM' est aussi parallèle à l'une de ces deux bissectrices, car l'égalité supposée $a^4 \beta^2 - b^4 \alpha^2 = 0$ donne

$$\frac{\alpha}{\beta} = \pm \frac{a^2}{b^2}, \quad \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{b^2}{a^2} = \pm 1,$$

et $-\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{b^2}{a^2}$ est le coefficient angulaire de MM'. Donc, s'il existait alors une hyperbole équilatère, passant par les points M, M', Q, Q', une droite MM' parallèle à l'une des deux asymptotes de l'hyperbole couperait cette courbe en deux points M, M', situés à distance finie, ce qui est, comme on sait, impossible. (G.)

sur la droite QQ' , lorsqu'on fait mouvoir le point P sur la droite représentée par l'équation $x + y = l$, nous remarquerons qu'en remplaçant μ par sa valeur l'équation de la droite QQ' devient

$$(1) \quad \frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{a^2 + b^2} = 0.$$

La perpendiculaire à cette droite, menée par l'origine, a pour équation

$$(2) \quad \alpha b^2 y + \beta a^2 x = 0.$$

Le point P devant se trouver sur la droite représentée par l'équation $x + y = l$, on a

$$(3) \quad \alpha + \beta = l.$$

L'équation du lieu cherché résulte de l'élimination de α et β entre les équations (1), (2) et (3).

Les deux dernières donnent

$$\alpha = -\frac{a^2 l x}{b^2 y - a^2 x} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b^2 l y}{b^2 y - a^2 x};$$

et, en remplaçant dans la première α , β par ces valeurs, et réduisant, on trouve

$$x^2 + y^2 - \frac{l}{a^2 + b^2} (b^2 y + a^2 x) = 0.$$

C'est l'équation du lieu cherché, qui est un cercle passant par l'origine des coordonnées (1).

(1) La valeur $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{a^2 + b^2}$ de μ revient à $\frac{(\beta - \alpha)l}{a^2 + b^2}$, puisque $\alpha + \beta = l$, et l'équation de la droite QQ' peut s'écrire

$$\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} + \frac{(\beta - \alpha)l}{a^2 + b^2} = 0,$$

d'où

$$\alpha \left(\frac{x}{a^2} - \frac{l}{a^2 + b^2} \right) + \beta \left(\frac{l}{a^2 + b^2} - y \right) = 0;$$

2° Le lieu décrit par le point de rencontre des cordes MM' et QQ' est représenté par l'équation qui résulte de l'élimination de α et β entre les trois équations

$$(4) \quad \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 = 0, .$$

$$(5) \quad \frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{a^2 + b^2} = 0,$$

$$(6) \quad \alpha + \beta = l.$$

La résolution des équations (4) et (6) par rapport à α et β donne

$$\alpha = \frac{1 - \frac{ly}{b^2}}{\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2}} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{1 - \frac{lx}{a^2}}{\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2}}.$$

En portant ces valeurs de α , β dans l'équation (5) et réduisant, on trouve

$$(7) \quad 2(a^2 + b^2)xy - \frac{1}{l}(a^2 + b^2 + l^2)(a^2y + b^2x) + 2a^2b^2 = 0,$$

on satisfait à cette équation en posant

$$\frac{x}{a^2} - \frac{l}{a^2 + b^2} = 0, \quad \frac{l}{a^2 + b^2} - y = 0;$$

donc, quels que soient α et β , la droite QQ' passe par un point fixe F dont les coordonnées x , y ont respectivement pour valeurs

$$\frac{la^2}{a^2 + b^2}, \quad \frac{lb^2}{a^2 + b^2}.$$

Il s'ensuit que le lieu de la projection du centre C de l'ellipse sur la droite QQ' est la circonférence décrite sur CF comme diamètre.

La droite MM' est, de même, assujettie à passer par un point fixe F', qui est, par rapport à l'ellipse, le pôle de la droite représentée par l'équation $x + y = l$, et dont les coordonnées sont

$$x = \frac{a^2}{l}, \quad y = \frac{b^2}{l}.$$

Le lieu de la projection du centre C de l'ellipse sur la droite MM' est la circonférence dont CF' est un diamètre.

Ces deux circonférences sont tangentes l'une à l'autre au centre de l'ellipse.

(G.)

équation qui représente une hyperbole équilatère, ayant ses asymptotes parallèles aux axes de coordonnées.

Démontrons maintenant que *ce dernier lieu passe par deux points fixes, quel que soit l*.

L'équation (7) est vérifiée lorsque les deux suivantes le sont simultanément :

$$(a^2 + b^2)xy + a^2b^2 = 0, \quad a^2y + b^2x = 0.$$

Ces deux équations sont indépendantes de l ; le lieu passe donc, quel que soit l , par les deux points fixes, intersection des lignes que les deux équations représentent. En les résolvant, on obtiendra les coordonnées des deux points.

L'équation $a^2y + b^2x = 0$ donne

$$y = -\frac{b^2}{a^2}x,$$

et, par suite, on a

$$-\frac{b^2}{a^2}(a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = 0,$$

d'où

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad y = \mp \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

L'un des deux points a pour coordonnées $+\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $-\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, et l'autre $-\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $+\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Les valeurs de l pour lesquelles le lieu se réduit à deux droites s'obtiendront en exprimant que les coordonnées du centre vérifient l'équation du lieu.

En désignant par f'_x et f'_y les dérivées du premier membre de l'équation (7), on a

$$f'_x = 2(a^2 + b^2)y - \frac{b^2}{l}(a^2 + b^2 + l^2) = 0,$$

$$f'_y = 2(a^2 + b^2)x - \frac{a^2}{l}(a^2 + b^2 + l^2) = 0,$$

d'où

$$y = \frac{b^2(a^2 + b^2 + l^2)}{2l(a^2 + b^2)}, \quad x = \frac{a^2(a^2 + b^2 + l^2)}{2l(a^2 + b^2)}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} 2(a^2 + b^2) \frac{a^2 b^2}{4l^2} \frac{(a^2 + b^2 + l^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} \\ + 2a^2 b^2 - \frac{a^2 b^2}{l^2} \frac{(a^2 + b^2 + l^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} = 0, \end{aligned}$$

ce qui se réduit à

$$(a^2 + b^2 - l^2)^2 = 0, \quad \text{d'où } l = \pm \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Donc le lieu se réduit à deux droites, lorsque

$$l = +\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{ou} \quad l = -\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Pour déterminer les équations des deux droites dans chacun de ces deux cas, il suffit de remplacer l par ses valeurs dans les équations

$$y = \frac{b^2(a^2 + b^2 + l^2)}{2l(a^2 + b^2)}, \quad x = \frac{a^2(a^2 + b^2 + l^2)}{2l(a^2 + b^2)}.$$

La valeur $+\sqrt{a^2 + b^2}$ de l donne

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Et pour $l = -\sqrt{a^2 + b^2}$ les équations des deux droites deviennent

$$x = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = -\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$