

G. KÆNIGS

**Sur le complexe formé par les axes d'une
surface du second ordre**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 267-272

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_267_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

deviennent

$$\begin{cases} B(Cx - Az) = 0, & AB = 0, \\ A(Bz - Cy) = 0, \\ A(Cx - Az) + B(Bz - Cy) = 0, & A^2 = 1; \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad z = 0.$$

Donc :

THÉORÈME. — *Parmi toutes les droites, invariablement liées au trièdre formé par la tangente, la binormale et la normale principale, en un point d'une ligne à courbures variables, il n'y a que la tangente, et les parallèles à la tangente situées dans le plan rectifiant, qui engendrent des surfaces développables.*

SUR LE COMPLEXE FORMÉ PAR LES AXES D'UNE SURFACE DU SECOND ORDRE;

PAR M. G. KOENIGS.

I. M. Reyce a appelé *axe d'une surface* S^2 *du second ordre* toute droite normale au plan polaire d'un de ses points. Les surfaces homothétiques et concentriques à S^2 forment un faisceau $F(\Sigma^2)$ de surfaces circonscrites à S^2 suivant sa trace c_∞^2 sur le plan de l'infini. Les axes de S^2 sont communs à toutes les surfaces du faisceau, et sur tout axe il existe un point M dont les plans polaires par rapport aux surfaces du faisceau sont normaux à cet axe; en particulier, la surface unique du système qui passe au point M y coupe l'axe normalement : donc le complexe des axes est aussi celui des normales aux surfaces du faisceau $F(\Sigma^2)$.

Par tout point de l'espace passe une surface unique du faisceau; nous dirons que ce point est le *point de départ* de la normale à cette surface.

II. Si nous prenons pour équation de la quadrique S^2

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

une droite quelconque du complexe des axes, ayant $M(x, y, z)$ pour point de départ, sera représentée par les équations

$$\left(\frac{X}{x} - 1\right)a^2 = \left(\frac{Y}{y} - 1\right)b^2 = \left(\frac{Z}{z} - 1\right)c^2.$$

L'équation suivante

$$Az + B\beta + C + Pq - Qp - R(\alpha q - \beta p) = 0$$

exprime que la droite ($x = \alpha z + p$, $y = \beta z + q$) fait partie d'un complexe linéaire : si l'on calcule les quantités α , β , p , q , $\alpha q - \beta p$ relatives à l'axe considéré, et qu'on les porte dans l'équation du complexe, on trouve

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= A \frac{x}{a^2} + B \frac{y}{b^2} + C \frac{z}{c^2} + P \frac{b^2 - c^2}{b^2 c^2} yz \\ &+ Q \frac{c^2 - a^2}{c^2 a^2} zx - R \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} xy = 0. \end{aligned} \right.$$

Ainsi, pour que six points M_1, M_2, \dots, M_6 , de coordonnées

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_6, y_6, z_6),$$

soient les points de départ de six axes appartenant à un même complexe linéaire, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer les quantités A, B, C, P, Q, R , ou plutôt leurs rapports, de sorte que les équations suivantes soient simultanément possibles :

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = 0. \quad \varphi(x_2, y_2, z_2) = 0. \quad \dots \quad \varphi(x_6, y_6, z_6) = 0.$$

Mais $\varphi(x, y, z) = 0$ est l'équation générale des quadriques circonscrites au tétraèdre principal commun à toutes les quadriques du faisceau $F(S^2)$; nous avons donc démontré ce théorème :

Pour que six axes d'une surface du second ordre appartiennent à un même complexe linéaire, il faut et il suffit que leurs six points de départ soient sur une même surface du second ordre circonscrite au tétraèdre principal de la surface.

Pour que cinq droites appartiennent à une congruence linéaire, il faut et il suffit qu'elles appartiennent à deux complexes linéaires : dans le cas des axes, il est donc nécessaire et suffisant que leurs points de départ appartiennent à deux quadriques circonscrites au tétraèdre principal; donc :

Pour que cinq axes d'une surface du second ordre appartiennent à une même congruence linéaire, il faut et il suffit que leurs cinq points de départ et les sommets du tétraèdre principal soient neuf points d'une même biquadratique.

Pour que quatre droites appartiennent à un même hyperboloïde, il faut et il suffit qu'elles appartiennent à trois complexes linéaires; dans le cas des axes, il est donc nécessaire et suffisant que leurs points de départ appartiennent à trois quadriques circonscrites au tétraèdre principal; de là ce théorème :

Pour que quatre axes d'une quadrique appartiennent à un même hyperboloïde, il faut et il suffit que leurs quatre points de départ et les sommets du tétraèdre principal soient huit points formant la base d'un faisceau de biquadratiques.

On sait que, si huit points forment la base d'un faisceau de biquadratiques, en les séparant arbitrairement en deux tétraèdres, il est possible de trouver une quadrique conjuguée à ces deux tétraèdres, et réciproquement, que si deux tétraèdres sont conjugués par rapport à une même quadrique, toute biquadratique passant par sept de leurs sommets ira passer par le huitième. On peut donc donner au théorème ci-dessus la forme suivante :

Pour que quatre axes d'une quadrique appartiennent à un même hyperboloïde, il faut et il suffit que le tétraèdre formé par leurs points de départ soit conjugué par rapport à une quadrique ayant les mêmes plans principaux que la proposée.

On peut remarquer que, si l'on prend quatre points sur une cubique gauche circonscrite au tétraèdre principal, les axes dont ils sont les points de départ sont sur un même hyperboloïde. En effet, huit points quelconques d'une cubique gauche peuvent être considérés comme formant la base d'un faisceau de biquadratiques (P. SERRET, *Géométrie de direction*). On en déduit le théorème suivant :

Si un point décrit une cubique gauche circonscrite au tétraèdre principal, l'axe dont il est le point de départ décrit un hyperboloïde.

Parmi les cubiques gauches circonscrites au tétraèdre principal et qui sont en nombre quadruplement infini, il en existe qui forment seulement une série triplement infinie; ce sont celles qui sont tangentes à un axe en un point différent d'un sommet du tétraèdre principal.

Dans un pareil cas, en appelant M le point de contact de la cubique avec l'axe qui la touche, l'hyperboloïde

se réduit à un cône dont M est le sommet, et l'on retrouve ainsi le cône découvert par Terquem. Ce cône est précisément celui du complexe qui est relatif au point M. On est donc ramené à des propriétés connues.

III. Actuellement introduisons dans les théorèmes ci-dessus l'hypothèse que les points de départ sont pris sur une même surface du faisceau $F(\Sigma^2)$, par exemple sur S^2 : nous obtenons des propriétés des normales à une même quadrique.

Le premier théorème montre que :

Sur toute quadrique, il existe un système quintuplement indéterminé de biquadratiques; les normales à la surface en tous les points d'une de ces biquadratiques font partie d'un même complexe linéaire.

Un cas particulier a été étudié par Chasles : c'est celui où le complexe linéaire est formé de droites en rencontrant une autre fixe. Il existe alors la relation

$$AP + BQ + CR = 0$$

entre les arbitraires de l'équation (1), qui ne représente plus qu'une série quadruplement indéterminée de quadratiques circonscrites au tétraèdre principal. Ainsi :

Sur toute quadrique, il existe un système quadruplement indéterminé de biquadratiques; les normales en tous les points d'une de ces biquadratiques rencontrent une droite fixe.

Les biquadratiques que nous venons de définir jouissent d'une propriété exclusive que voici :

Les points d'une quelconque de ces biquadratiques se distribuent en groupes de six : les normales en six points d'un même groupe concourent, et le lieu de ces points

de concours est une droite. (C'est précisément la droite ci-dessus.)

M. Desboves a donné un nom à cette droite, dans le cas particulier où la biquadratique se compose de deux coniques : il l'appelle la *synnormale*.

En continuant l'application des théorèmes ci-dessus aux propriétés des normales, on voit que :

Les biquadratiques circonscrites au tétraèdre principal d'une quadrique la percent chacune en huit points : les normales en huit points d'un même groupe rencontrent deux mêmes droites.

Les cubiques gauches circonscrites au tétraèdre principal d'une quadrique la percent chacune en six points : les normales en six points d'un même groupe appartiennent à un même hyperboloïde.

Pour que les normales en quatre points d'une quadrique appartiennent à un même hyperboloïde, il faut et il suffit que le tétraèdre formé par ces quatre points soit conjugué par rapport à une quadrique ayant les mêmes plans principaux que la proposée.

RECHERCHE DES CERCLES COUPANT TROIS CERCLES DONNES SOUS DES ANGLES DETERMINES ;

PAR M. E.-M. LAQUIÈRE.

La lecture des formules fondamentales de Géométrie tricirculaire et tétrasphérique exposées par M. Lucas (*Nouv. Ann.*, 2^e série, t. XV, p. 501) nous remet en mémoire une formule que nous possédons depuis une quinzaine d'années environ, représentant l'équation de l'en-