FORESTIER

Équation aux carrés des différences de l'équation générale du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 209-219

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__209_0>

ÉQUATION AUX CARRÉS DES DIFFÉRENCES DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. FORESTIER.

1. Soit
$$x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = 0$$
l'équation générale du quatrième degré.

Pour trouver l'équation aux différences, on doit remplacer x par $x+y$, ce qui donne

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l} x^4 + 4y & x^3 + 6y^2 & x^2 + 4y^3 & x + y^4 \\ \quad + p_1 & \quad + 3p_1 y & \quad + 3p_1 y^2 & \quad + p_1 y^3 \\ & \quad + p_2 & \quad + 2p_2 y & \quad + p_2 y^2 \\ & & \quad + p_3 & \quad + p_3 y \\ & & & \quad + p_4 \end{array}\right\} = 0,$$

et l'on doit éliminer x entre l'équation donnée et celle-ci. L'équation résultante en y est l'équation cherchée.

2. Si l'on effectue cette élimination par la méthode de Sylvester, on est conduit à un déterminant du huitième ordre qui contient 40320 termes, dont chacun est le produit de huit facteurs, qui, pour la plupart, sont des polynômes en y pouvant avoir jusqu'à cinq termes. Plusieurs d'entre eux sont nuls, parce que, parmi les soixante-quatre facteurs qui concourent à les former, il y en a douze qui sont égaux à zéro. Néanmoins, malgré la simplification considérable que cette circonstance apporte dans l'expression, le calcul paraît impraticable.

3. En employant la méthode d'élimination de Bézout, on obtient un déterminant du quatrième ordre, dont le

développement n'a plus que vingt-quatre termes. Mais chacun de ses termes est un polynôme de degré élevé par rapport à y. Plusieurs sont du seizième degré, quoique le résultat final doive se réduire au douzième. En outre, les coefficients des puissances de y sont eux-mêmes des polynômes dépendant de $p_1, p_2, \ldots$. Il serait encore très difficile de mener à bien un pareil calcul.

Les autres méthodes d'élimination ne réussissent pas mieux.

4. Les méthodes que j'ai employées sont relativement très courtes, quoique l'ensemble soit encore un travail de longue haleine. Ces procédés ont le grand avantage de fractionner le calcul. Chaque coefficient s'obtient séparément et indépendamment des autres. Chacun de ces coefficients est lui-même calculé par fractions indépendantes, ce qui donne une grande simplicité et surtout une grande sûreté.

5. Le but de ce travail est d'exposer ces méthodes et d'entrer dans tous les détails du calcul de deux des coefficients. Il est inutile de les reproduire pour chacun des autres. Il suffira de donner les résultats soigneusement contrôlés.

6. Soit

$$(1) \qquad x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = 0$$

l'équation du quatrième degré. L'équation aux différences sera du douzième degré, et l'équation aux carrés des différences sera du sixième degré. Soit donc

$$(2) \qquad z^6 + Q_1 z^5 + Q_2 z^4 + Q_3 z^3 + Q_4 z^2 + Q_5 z + Q_6 = 0$$

cette équation.

Les coefficients Q_1, Q_2, Q_3, ... sont des fonctions des différences des quatre racines de l'équation (1). Si je désigne ces racines par α, β, γ, δ, nous aurons

$$-Q_1 = \Sigma(\alpha-\beta)^2,\quad Q_2 = \Sigma(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2,$$
$$-Q_3 = \Sigma(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2,\quad \ldots.$$

Le signe Σ s'étend à toutes les différences que l'on peut faire entre les quatre racines.

7. Chaque coefficient Q_1, Q_2, Q_3, ... est une fonction symétrique des racines de l'équation (1), et son expression, en fonction de p_1, p_2, p_3 et p_4, est une fonction entière de ces coefficients. En outre, la somme des indices des facteurs p_1, p_2, p_3, p_4, dans chaque terme de chacune de ces expressions, est constante et égale au degré de l'expression en fonction des racines; ainsi, dans Q_3, cette somme d'indices sera égale à 6.

En effet, soit

$$-Q_3 = \varphi(p_1, p_2, p_3, p_4) = \Sigma(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2.$$

Je multiplie toutes les racines de l'équation (1) par k. Cette équation devient

$$x^4 + kp_1x^3 + k^2p_2x^2 + k^3p_3x + k^4p_4 = 0.$$

En général, le coefficient p_n de l'équation (1) devient $k^n p_n$ dans la nouvelle équation. Nous aurons donc

$$\begin{aligned}&\varphi(kp_1, k^2p_2, k^3p_3, k^4p_4)\\ &\quad = \Sigma[(k\alpha-k\beta)^2(k\alpha-k\gamma)^2(k\alpha-k\delta)^2]\\ &\quad = k^6\Sigma[(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2] = k^6\varphi(p_1, p_2, p_3, p_4).\end{aligned}$$

Donc la fonction φ est homogène par rapport aux indices de p et du sixième degré.

8. Le degré de $\varphi(p_1, p_2, p_3, p_4)$, expression de $-Q_3$, c'est-à-dire le nombre des facteurs du terme qui en a le plus, est égal à la plus haute puissance des racines en-

trant dans l'expression de ce coefficient en fonction des racines.

En effet, désignons par q_1 la somme des trois racines β, γ, δ, et par q_2, q_3, q_4 les sommes de leurs produits deux à deux, trois à trois et quatre à quatre. Nous aurons

$$p_1 = -\alpha - q_1,\quad p_2 = \alpha q_1 + q_2,$$
$$p_3 = \alpha q_2 + q_3,\quad p_4 = \alpha q_3 + q_4.$$

Substituons ces valeurs dans $\varphi(p_1, p_2, p_3, p_4)$. Nous devons reproduire $\Sigma[(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\alpha - \delta)^2]$. Or, si la fonction φ contenait des termes supérieurs au sixième, le résultat de la substitution contiendrait des puissances de α supérieures à 6, qui ne pourraient pas se réduire, et l'on ne retrouverait pas le résultat prévu. Donc la fonction φ n'est pas d'un degré supérieur au sixième. On voit de même qu'elle n'est pas d'un degré inférieur.

9. Ces deux propriétés nous permettent d'écrire immédiatement l'expression littérale de chaque coefficient. Ainsi on trouve

$$\begin{aligned}-Q_3 = {} & Ap_4p_2 + Bp_4p_1^2 + Cp_3^2 + Dp_3p_2p_1 \\ & + Ep_3p_1^3 + Fp_2^3 + Gp_2^2p_1^2 + Hp_2p_1^4 + Ip_1^6.\end{aligned}$$

Dans $Q_4 = \Sigma[(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\alpha - \delta)^2(\beta - \gamma)^2]$, la somme des indices de chaque terme doit être 8, et le degré, 6. On a donc

$$\begin{aligned}Q_4 = {} & Ap_4^2 + Bp_4p_3p_1 + Cp_4p_2^2 + Dp_4p_2p_1^2 \\ & + Ep_4p_1^4 + Fp_3^2p_2 + Gp_3^2p_1^2 + Hp_3p_2^2p_1 \\ & + Ip_3p_1^5 + Kp_3p_2p_1^3 + Lp_2^4 + Mp_2^3p_1^2 + Np_2^2p_1^4.\end{aligned}$$

Les mêmes lettres dans les deux expressions ne représentent pas les mêmes nombres. Les expressions sont indépendantes l'une de l'autre, et les lettres A, B, ...

représentent les coefficients inconnus de chaque polynôme, coefficients qui restent à déterminer.

10. Nous avons vu que $Q_1, Q_2, \ldots$ sont des fonctions des différences des racines de l'équation (1). Mais toute fonction de la différence des racines d'une équation doit satisfaire à une équation différentielle qui provient de ce que cette fonction ne doit pas changer quand on augmente d'une même quantité toutes les racines de cette équation. Je vais établir cette relation, qui me servira dans le calcul des quantités $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$.

Soit

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ \text{ou} \\ x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + p_3 x^{n-3} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0 \end{array}\right.$$

une équation donnée, et

$$(4)\qquad \varphi(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$$

une fonction quelconque de la différence de ses racines exprimée au moyen des coefficients de l'équation. Je remplace, dans l'équation (3), x par $x+\lambda$, ce qui revient à augmenter de $-\lambda$ chaque racine de cette équation. Je développe le résultat $f(x+\lambda) = 0$ suivant les puissances croissantes de λ :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} f(x) + \dfrac{\lambda}{1}[n x^{n-1} + (n-1)p_1 x^{n-2} + (n-2)p_2 x^{n-3} + \ldots] \\ \qquad\qquad + \dfrac{\lambda^2}{1.2}[n(n-1)x^{n-2} + \ldots]\ldots = 0. \end{array}\right.$$

J'ordonne maintenant cette équation suivant les puissances décroissantes de x, j'aurai

$$x^n + P_1 x^{n-1} + P_2 x^{n-2} + P_3 x^{n-3} + \ldots + P_n = 0,$$

en posant

$$
\begin{aligned}
P_1 &= p_1 - n\lambda,\\
P_2 &= p_2 - (n-1)p_1\lambda - \frac{n(n-1)}{1.2}p_2\lambda^2,\\
P_3 &= p_3 - (n-2)p_2\lambda - \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P_k &= p_k - (n-k-1)p_{k-1}\lambda - \ldots.
\end{aligned}
$$

Le coefficient de λ dans chacune de ces expressions est donné par la quantité dans la première parenthèse de l'équation (5).

La fonction (4) de la différence des racines deviendra

$$\varphi(P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n).$$

Je la développe suivant les puissances de λ :

$$
\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_n)
+ \lambda\left(\frac{d\varphi}{dp_1}\frac{dP_1}{d\lambda} + \frac{d\varphi}{dp_2}\frac{dP_2}{d\lambda} + \frac{d\varphi}{dp_3}\frac{dP_3}{d\lambda} + \ldots\right) + \frac{\lambda^2}{1.2}(\ldots).
$$

Mais

$$
\frac{dP_1}{d\lambda} = n, \quad \frac{dP_2}{d\lambda} = (n-1)p_1, \quad \frac{dP_3}{d\lambda} = (n-2)p_2, \quad \ldots.
$$

Cette fonction ne change pas avec λ, donc chaque coefficient de λ est nul, et l'on a

$$
(6) \qquad n\frac{d\varphi}{dp_1} + (n-1)p_1\frac{d\varphi}{dp_2} + (n-2)p_2\frac{d\varphi}{dp_3} + \ldots = 0.
$$

Cette relation doit avoir lieu quelles que soient les valeurs de p_1, p_2, p_3, ... Si elle est entière, le coefficient de chaque terme sera nul, ce qui donnera autant d'équations qu'il y a de termes.

Si l'expression φ est l'une de celles que nous avons à considérer, où la somme des indices des facteurs de chaque terme est constante, il est facile de voir que l'équation (6) sera du même degré que φ, mais que la somme des indices dans chaque terme sera moindre d'une unité. Cela fournira un contrôle des calculs.

Calcul du coefficient Q_3.

11. Nous avons trouvé

$$\begin{aligned}-Q_3 &= \Sigma(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2\\ &= Ap_4p_2 + Bp_4p_1^2 + Cp_3^2 + Dp_3p_2p_1\\ &\quad + Ep_3p_1^3 + Fp_2^3 + Gp_2^2p_1^2 + Hp_2p_1^4 + Ip_1^6.\end{aligned}$$

Je fais $p_3 = 0$, $p_4 = 0$. Deux des racines de l'équation (1) sont nulles, et les quatre racines sont α, β, 0, 0. L'expression $\Sigma(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2$ devient facile à calculer; on trouve

$$(\alpha-\beta)^2[(\alpha^2+\beta^2)^2 + 2\alpha^2\beta^2] + 2\alpha^2\beta^2(\alpha^2+\beta^2).$$

Les racines α et β sont données par l'équation

$$x^2 + p_1x + p_2 = 0,$$

et les fonctions de ces deux racines qui entrent dans l'expression précédente s'obtiennent presque sans calcul.

On trouve $(\alpha-\beta)^2 = p_1^2 - 4p^2$, $\alpha^2+\beta^2 = p_1^2 - 2p_2$ et $\alpha\beta = p_2$. En substituant, l'expression de $-Q_3$ devient

$$-28p_2^3 + 24p_2^2p_1^2 - 8p_2p_1^4 + p_1^6.$$

Mais, d'un autre côté, la valeur de $-Q_3$, par l'hypothèse $p_3 = 0$, $p_4 = 0$, devient

$$Fp_2^3 + Gp_2^2p_1^2 + Hp_2p_1^4 + Ip_1^6,$$

d'où je déduis par comparaison

$$F = -28,\quad G = 24,\quad H = -8,\quad I = 1,$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}-Q_3 &= Ap_4p_2 + Bp_4p_1^2 + Cp_3^2 + Dp_3p_2p_1\\ &\quad + Ep_3p_1^3 - 28p_2^3 + 24p_2^2p_1^2 - 8p_2p_1^4 + p_1^6,\end{aligned}$$

et il ne reste plus que cinq coefficients à déterminer.

12. Pour calculer ces coefficients, j'aurai recours à l'équation différentielle (6), qui devient, pour l'équation donnée,

$$4\frac{d\varphi}{dp_1}+3p_1\frac{d\varphi}{dp_2}+2p_2\frac{d\varphi}{dp_3}+p_3\frac{d\varphi}{dp_4}=0.$$

En la développant pour la fonction $-Q_3$, on obtient

$$\begin{aligned}&(3A+8B)p_4p_1\\&\quad+(A+4C+4D)p_3p_2+(B+3D+12E)p_3p_1^2\\&\quad+(2D-60)p_2^2p_1+(2E+16)p_2p_1^3+(24-24)p_1^5=0.\end{aligned}$$

J'égale à zéro chaque coefficient, et j'ai ainsi une identité et les cinq équations suivantes, pour déterminer les cinq coefficients inconnus :

$$3A+8B=0,\quad A+4C+4D=0,\quad B+3D+12E=0,$$
$$2D-60=0,\quad 2E+16=0;$$

d'où l'on tire

$$A=-16,\quad B=6,\quad C=-26,\quad D=30,\quad E=-8.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}-Q_3=&-16p_4p_2+6p_4p_1^2-26p_3^2+30p_3p_2p_1\\&-8p_3p_1^3-28p_2^3+24p_2^2p_1^2-8p_2p_1^4+p_1^6.\end{aligned}$$

Calcul de Q_4.

13. Nous savons que

$$Q_4=\Sigma(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2.$$

Son expression en fonction de p_1, p_2, p_3, p_4 sera du sixième degré par rapport au nombre des facteurs (8), et par rapport aux indices, elle sera homogène et du huitième ordre (7). Nous aurons donc

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}Q_4=&\,Ap_4^2+Bp_4p_3p_1+Cp_4p_2^2+Dp_4p_2p_1^2\\&+Ep_4p_1^4+Fp_3^2p_2+Gp_3^2p_1^2+Hp_3p_2^2p_1\\&+Ip_3p_1^5+Kp_3p_2p_1^3+Lp_2^4+Mp_2^3p_1^2+Np_2^2p_1^4.\end{aligned}\right.$$

14. On pourrait, comme dans le calcul de Q_3, faire $p_3 = 0$, $p_4 = 0$, pour exprimer, dans ce cas particulier, Q_4 en fonction de p_1 et p_2, et déterminer un certain nombre de coefficients. Mais, pour avoir un plus grand nombre de vérifications par l'équation différentielle, faisons seulement $p_4 = 0$. Alors

$$\Sigma(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2$$

se réduit à

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha^2\beta^2\gamma^2[(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2]+(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)\\ &\quad\times[(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2]\\ &\quad+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2.\end{aligned}\right.$$

Les trois parenthèses qui dépendent des différences des racines sont les coefficients, au signe près, de l'équation aux carrés des différences de l'équation du troisième degré

$$x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0.$$

Cette équation est connue : c'est

$$\begin{aligned} &x^3+(6p_2-2p_1^2)x^2+(9p_2^2-6p_2p_1^2+p_1^4)x\\ &\quad+(27p_3^2+4p_3p_1^3+4p_2^3-18p_3p_2p_1-p_2^2p_1^2)=0.\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2=-6p_2+2p_1^2,$$

$$\begin{aligned}&(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2\\ &\quad=9p_2^2-6p_2p_1^2+p_1^4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2\\ &\quad=-27p_3^2-4p_3p_1^3+18p_3p_2p_1-4p_2^3+p_2^2p_1^2.\end{aligned}$$

Les trois parenthèses qui dépendent de α, β, γ sont aussi, au signe près, les coefficients de l'équation aux carrés des racines de l'équation proposée, équation que l'on obtient en changeant dans (1) x en $\sqrt{x}$. Cette équation est

$$x^3+(2p_2-p_1^2)x^2+(p_2^2-2p_3p_1)x-p_3^2=0;$$

d'où l'on tire

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = p_3^2,$$
$$\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 = -2p_3p_1 + p_2^2,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -2p_2 + p_1^2.$$

En substituant dans l'expression (8), nous obtenons

$$\begin{aligned}&48p_3^2p_2 - 25p_3^2p_1^2 - 54p_3p_2^2p_1\\ &\quad - 6p_3p_1^5 + 38p_3p_2p_1^3 + 17p_2^4 - 12p_2^3p_1^2 + 2p_2^2p_1^4.\end{aligned}$$

En faisant $p_4 = 0$ dans (7), et comparant le résultat à ce dernier, nous en déduisons

$$\begin{gathered}F = 48,\quad G = -25,\quad H = -54,\quad I = -6,\quad K = 38,\\ L = 17,\quad M = -12,\quad N = 2,\end{gathered}$$

et il ne reste plus que les cinq premiers coefficients à déterminer.

13. Nous avons donc

$$\begin{aligned}Q_4 = {}& Ap_4^2 + Bp_4p_3p_1 + Cp_4p_2^2 + Dp_4p_2p_1^2\\ &+ Ep_4p_1^4 + 48p_3^2p_2 - 25p_3^2p_1^2 - 54p_3p_2^2p_1\\ &+ 38p_3p_2p_1^3 - 6p_3p_1^5 + 17p_2^4 - 12p_2^3p_1^2 + 2p_2^2p_1^4.\end{aligned}$$

L'équation différentielle (6) appliquée à cette fonction devient, ainsi que nous l'avons déjà dit (12),

$$4\frac{d\varphi}{dp_1} + 3p_1\frac{d\varphi}{dp_2} + 2p_2\frac{d\varphi}{dp_3} + p_3\frac{d\varphi}{dp_4} = 0,$$

et elle donne

$$\begin{aligned}&(2A + 3B)p_4p_3 + 2(B + 3C + 4D)p_4p_2p_1\\ &\quad + (3D + 16E)p_4p_1^3 + (B - 56)p_3^2p_1 + (C - 24)p_3p_2^2\\ &\quad + (D + 32)p_3p_2p_1^2 + (E - 6)p_3p_1^4 + 0.p_2^3p_1\\ &\qquad\qquad + 0.p_2^2p_1^3 + 0.p_2p_1^5 = 0.\end{aligned}$$

Chaque coefficient devant être nul, nous obtenons sept équations et trois identités qui sont trois vérifications. En résolvant les sept équations, nous obtenons les valeurs des cinq coefficients inconnus, et deux nouvelles vérifications. Les valeurs des coefficients sont

$$A = -112, \quad B = 56, \quad C = 24, \quad D = -32, \quad E = 6.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} Q_4 = &-112p_4^2 + 56p_4p_3p_1 + 24p_4p_2^2 \\ &- 32p_4p_2p_1^2 + 6p_4p_1^4 + 48p_3^2p_2 - 25p_3^2p_1^2 - 54p_3p_2^2p_1 \\ &+ 38p_3p_2p_1^3 - 6p_3p_1^5 + 17p_2^4 - 12p_2^3p_1^2 + 2p_2^2p_1^4. \end{aligned}$$

Conclusion.

16. L'équation

$$x^4 + p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4 = 0$$

a pour équation aux carrés des différences

$$x^6 + Q_1x^5 + Q_2x^4 + Q_3x^3 + Q_4x^2 + Q_5x + Q_6 = 0.$$

Les valeurs des coefficients sont

$$\begin{aligned} Q_1 = &\quad 8p_2 - 3p_1^2, \\ Q_2 = &\quad 8p_4 - 2p_3p_1 + 22p_2^2 - 16p_2p_1^2 + 3p_1^4, \\ Q_3 = &\quad 16p_4p_2 - 6p_4p_1^2 + 26p_3^2 - 30p_3p_2p_1 + 8p_3p_1^3 + 28p_2^3 \\ &- 24p_2^2p_1^2 + 8p_2p_1^4 - p_1^6, \\ Q_4 = &-112p_4^2 + 56p_4p_3p_1 + 24p_4p_2^2 - 32p_4p_2p_1^2 + 6p_4p_1^4 \\ &+ 48p_3^2p_2 - 25p_3^2p_1^2 - 54p_3p_2^2p_1 + 38p_3p_2p_1^3 - 6p_3p_1^5 \\ &+ 17p_2^4 - 12p_2^3p_1^2 + 2p_2^2p_1^4, \\ Q_5 = &-192p_4^2p_2 + 72p_4^2p_1^2 + 216p_4p_3^2 - 120p_4p_3p_2p_1 \\ &+ 18p_4p_3p_1^3 + 32p_4p_2^3 - 6p_4p_2^2p_1^2 - 54p_3^3p_1 - 18p_3^2p_2^2 \\ &+ 42p_3^2p_2p_1^2 - 9p_3^2p_1^4 - 26p_3p_2^3p_1 + 6p_3p_2^2p_1^3 \\ &+ 4p_2^5 - p_2^4p_1^2, \\ Q_6 = &\quad 256p_4^3 - 192p_4^2p_3p_1 - 128p_4^2p_2^2 + 144p_4^2p_2p_1^2 \\ &- 27p_4^2p_1^4 + 144p_4p_3^2p_2 - 6p_4p_3^2p_1^2 - 80p_4p_3p_2^2p_1 \\ &+ 18p_4p_3p_2p_1^3 + 16p_4p_2^4 - 4p_4p_2^3p_1^2 - 27p_3^4 \\ &+ 18p_3^3p_2p_1 - 4p_3^3p_1^3 - 4p_3^2p_2^3 + p_3^2p_2^2p_1^2. \end{aligned}$$