ERNEST CESÁRO

Théorème de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 129-133

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__129_1>

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE (1);

PAR M. ERNEST CESÁRO.

Parmi toutes les droites invariablement reliées au trièdre formé par la tangente, la binormale et la normale principale en un point M *quelconque d'une*

(1) Généralisation d'un théorème de M. Appell.

courbe, autre qu'une hélice, il n'y a que les droites suivantes qui engendrent une surface développable :

1° *La tangente, et les parallèles à la tangente situées dans le plan tangent ;*

2° *La droite polaire, et les parallèles à la droite polaire situées dans le plan mené par cette droite parallèlement au plan tangent ;*

3° *Les tangentes à la parabole du plan osculateur, qui a son sommet en* M, *son foyer au centre de courbure ;*

4° *Les tangentes à la parabole du plan normal, qui a son sommet au centre de courbure, son foyer en* M.

I. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que la droite représentée par les équations

$$\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{C}$$

engendre une surface développable est

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}&(B\,dC-C\,dB)\,dx+(C\,dA-A\,dC)\,dy\\&\qquad+(A\,dB-B\,dA)\,dz=0.\end{aligned}\right.$$

Prenons comme axes la tangente, la binormale et la normale principale en un point M de la courbe, et considérons le trièdre formé par les mêmes droites, au point M′ infiniment voisin. On trouve aisément que les cosinus directeurs des anciennes directions des arêtes du trièdre, par rapport aux nouvelles, sont

T..............	1,	0,	$-\varepsilon$,
B..............	0,	1,	$-\eta$,
N..............	ε,	η,	1,

ε et η étant les angles de contingence et de torsion. Parmi les huit trièdres trirectangles formés par les trois droites en question, on a choisi celui qui contient l'élément de courbe MM'. Soient D, D' deux positions infiniment voisines d'une droite invariablement liée au trièdre. Soient A, B, C les cosinus directeurs de D par rapport aux anciens axes, ou de D' par rapport aux nouveaux. Une formule connue donne immédiatement

$$\begin{cases} A + dA = \cos(D', T) = A - C\varepsilon, \\ B + dB = \cos(D', B) = B - C\eta, \\ C + dC = \cos(D', N) = A\varepsilon + B\eta + C, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} dA = -C\varepsilon, \\ dB = -C\eta, \\ dC = A\varepsilon + B\eta. \end{cases}$$

Des considérations analogues nous donneraient

$$\begin{cases} dx = -\varepsilon z + ds = (\rho - z)\varepsilon, \\ dy = -\eta z, \\ dz = \varepsilon x + \eta y. \end{cases}$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'égalité (1), celle-ci devient

$$\begin{aligned} &B(Cx - Az - A\rho)\varepsilon^2 + A(Bz - Cy)\eta^2 \\ &\quad - [A(Cx - Az - A\rho) + B(Bz - Cy) - \rho]\varepsilon\eta = 0. \end{aligned}$$

Si la courbe n'est pas une hélice, le rapport $\frac{\varepsilon}{\eta}$ varie, et il faut, pour que la condition ci-dessus soit remplie, que les coefficients de ε^2, η^2, $\varepsilon\eta$ soient séparément nuls. On doit donc avoir

$$(2) \qquad \begin{cases} B(Cx - Az - A\rho) = 0, \\ A(Bz - Cy) = 0, \\ A(Cx - Az - A\rho) + B(Bz - Cy) = \rho. \end{cases}$$

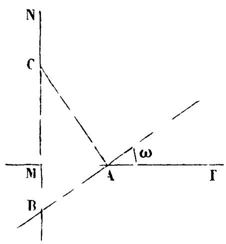
On ne peut supposer A et B nuls tous les deux, ou tous les deux différents de zéro, car, dans l'un et l'autre cas, la troisième des conditions (2) ne serait pas remplie. Nous devons donc supposer B nul et A différent de zéro, ou bien l'inverse.

II. $B = 0$ (parallèles au plan osculateur). On doit avoir

$$\begin{cases} Cy = 0, \\ A(Cx - Az) = (1 - A^2)\rho. \end{cases}$$

1° $C = 0$ ($A = 1$, parallèles à la tangente). La deuxième condition devient $z = 0$ (plan tangent).

2° $y = 0$ (plan osculateur). En posant $A = \cos\omega$,



$C = \sin\omega$, la deuxieme condition devient

$$(3) \qquad x \sin\omega \cos\omega - z \cos^2\omega = \rho \sin^2\omega.$$

Soit AB la position de la droite pour une valeur déterminée de ω. On a, en faisant $z = 0$ dans l'équation (3),

$$MA = \rho \tan\omega.$$

Or, si l'on élève AC perpendiculaire à AB, on a évidemment

$$MA = MC \tan\omega,$$

d'où l'on conclut que C est le centre de courbure. L'enveloppe des droites AB est donc l'antipodaire de MT par rapport au pôle C. C'est, d'après une propriété connue, la parabole ayant son sommet en M et son foyer en C.

III. $A = 0$ (parallèles au plan normal). On doit avoir

$$\begin{cases} Cx = 0, \\ B(Bz - Cy) = \rho. \end{cases}$$

1° $C = 0$ ($B = 1$, parallèles à la binormale). La deuxième condition devient $z = \rho$ (plan mené par le centre de courbure parallèlement au plan tangent).

2° $X = 0$ (plan normal). En posant $B = \cos\omega$, $C = \sin\omega$, la deuxième condition devient

$$z\cos^2\omega - y\sin\omega\cos\omega = \rho,$$

ou bien, si l'on transporte l'origine en C,

$$z\cos^2\omega - y\sin\omega\cos\omega = \rho\sin^2\omega.$$

Cette équation ne diffère de l'équation (3) que par le changement de ρ en $-\rho$ (et de x en y). L'enveloppe des droites qu'elle représente est donc une parabole égale à la première, mais tournée en sens inverse, c'est-à-dire ayant son sommet en C et son foyer en M.