NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HENRI DUFAU

Théorème de l'hexagone inscrit dans une conique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 99-102

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__99_0>

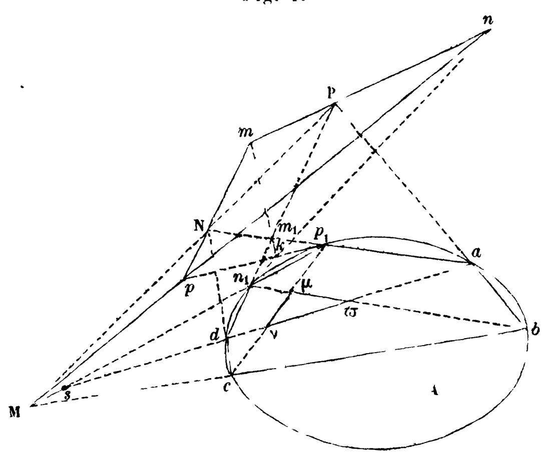
THÉORÈME DE L'HEXAGONE INSCRIT DANS UNE CONIQUE,

PAR M. HENRI DUFAU,
Élève du lycée de Bordeaux.

Nous allons déduire de la propriété fondamentale de la polaire le théorème de Pascal, et cela par un raisonnement géométrique élémentaire.

Considérons l'hexagone $abcdn_1p_1$ (*fig.* 1) inscrit

Fig. 1.



dans la conique A; M, N, P sont les points de rencontre des côtés opposés.

Joignons deux à deux les sommets opposés de l'hexagone; nous formons ainsi un triangle $\mu\nu\varpi$. Prenons successivement :

Le pôle m de $\nu\varpi$ par rapport à la conique,
Le pôle n de $\varpi\mu$ »
Le pôle p de $\mu\nu$ »

Il est facile de voir que les points M, N, P seront respectivement sur les côtés du triangle mnp : par exemple, P sera sur mn polaire de ϖ; car, $n_1 b$ et ad se coupant en ϖ, ab et $n_1 d$ se couperont sur la polaire de ϖ.

Cela posé, considérons les deux triangles mnp et $m_1 n_1 p_1$:

mn	coupe	$m_1 n_1$	en	P,
np	»	$n_1 p_1$	»	M,
pm	»	$p_1 m_1$	»	N.

Or, d'après un théorème connu, pour que M, N, P soient en ligne droite, il faut et il suffit que leurs sommets correspondants soient situés sur trois droites concourantes kmm_1, knn_1, kpp_1.

Or je dis que cette condition est remplie.

En effet, n est le pôle de ϖn_1 : donc nn_1 est tangente à la conique en n_1; p est le pôle de $p_1 \nu$: donc pp_1 est tangente à la conique en p_1; ces deux tangentes se coupent en k. En outre, $p_1 n_1$ et ad se coupent en S.

k, m_1 et m se trouvent alors sur la polaire de S, d'après la propriété de la polaire déjà signalée : donc ces trois points sont en ligne droite. C. Q. F. D.

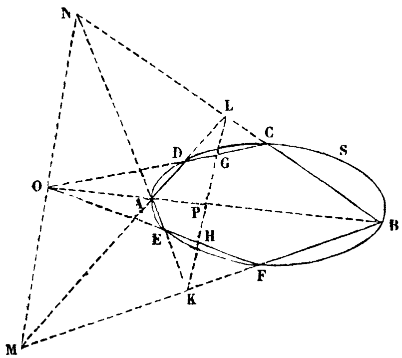
La démonstration corrélative conduirait au théorème corrélatif, celui de Brianchon ; elle ne diffère de la précédente que par l'échange de l'élément point en l'élément droite, et réciproquement. Tout revient alors à démontrer que deux triangles ont leurs sommets alignés sur un même point, ou, ce qui revient au même, que les points de rencontre des côtés opposés sont sur une même droite, que l'on constate être la polaire d'un certain point par rapport à la conique.

Nous allons montrer maintenant que, réciproquement, du théorème de Pascal on peut déduire la propriété fondamentale de la polaire.

Considérons une courbe S à laquelle le théorème de Pascal soit applicable; je dis que le lieu des conjugués harmoniques P de O par rapport aux points A et B, quand la sécante tourne autour du point quelconque O, est une ligne droite.

En effet, par O faisons passer deux sécantes fixes ODC,

Fig. 2.



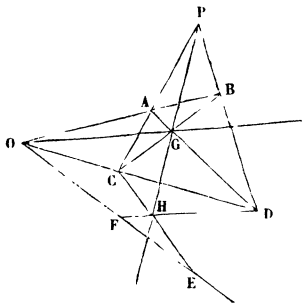
OEF et la sécante mobile OAB. Appliquons le théorème de l'hexagone; les trois points M, O, N seront en ligne droite.

Dans le quadrilatère complet ALBKMN, les quatre points O, A, P, B seront conjugués harmoniques; de même pour ODGC et OEHF, sections de deux faisceaux harmoniques L.OAPB et K.OAPB. Donc le lieu des conjugués harmoniques P sera la droite fixe HG.

Il résulte de là que le théorème de l'hexagone est une conséquence immédiate de la propriété de la polaire, et réciproquement; on peut d'ailleurs, d'après ce qui précède, construire la courbe par points, connaissant cinq points, rien qu'en se servant de la polaire.

Soient donnés les cinq points A, B, C, D, E qui définissent une conique. Joignons BA et CD, qui se coupent en O ; PG sera la polaire de O par rapport à la conique cherchée ; il nous est alors facile de construire un

Fig. 3.



sixième point F de cette conique. Cela fait, si nous considérons la polaire OG de P, nous pourrons avoir deux nouveaux points d'intersection, et ainsi de suite en doublant, pourvu que l'on ne prenne pas deux fois la même polaire.