Weill

# De l’involution de plusieurs points sur une conique

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 1 (1882), p. 62-79

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__62_1>

# DE L'INVOLUTION DE PLUSIEURS POINTS SUR UNE CONIQUE;

PAR M. WEILL.

I. Considérons une conique rapportée à un triangle conjugué; elle aura pour équation

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Un point de cette conique est défini par un paramètre $t$ à l'aide des relations

$$x = z\,\frac{2t}{1+t^2}, \quad y = z\,\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Trois points pris sur cette conique formeront une involution si l'on a, pour définir les valeurs de $t$ qui leur correspondent, l'équation

$$t^3 + \lambda t^2 + (a\lambda + b)t + c\lambda + d + 0.$$

En désignant par $t$ et $t'$ deux racines de cette équation, on a

$$\frac{t^3 + bt + d}{t^2 + at + c} = \frac{t'^3 + bt' + d}{t'^2 + at' + c},$$

d'où l'on déduit

$$(\mathrm{R})\quad \left\{ \begin{array}{l} t^2t'^2 + att'(t + t') + c(t + t')^2 \\ \qquad - (c + b)tt' - d(t + t') + bc - ad = 0. \end{array} \right.$$

Telle est la relation fondamentale qui lie deux quelconques des trois *éléments* d'une involution du troisième ordre.

Soient A, B, C les trois points considérés sur la conique et soit

$$px + qy - z = 0$$

l'équation du côté CB; les valeurs de $t$ correspondant à C et B seront données par l'équation

$$2pt + q(1 - t^2) - 1 - t^2 = 0,$$

qui donne

$$t + t' = \frac{2p}{q + 1}, \quad tt' = \frac{1 - q}{1 + q}.$$

Ces valeurs, transportées dans la relation (R), donnent

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} (1 - q)^2 + a.2p(1 - q) + c.4p^2 - (c + b)(1 - q^2) \\ \qquad - 2pd(q + 1) + (bc - ad)(1 + q)^2 = 0. \end{array} \right.$$

L'équation que nous venons de trouver est l'équation tangentielle de la conique enveloppée par les côtés du triangle ABC. Or, si nous avons choisi pour triangle des coordonnées le triangle conjugué commun aux deux coniques, l'équation de cette conique enveloppe sera

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} - z^2 = 0,$$

et son équation tangentielle

$$(2) \qquad p^2\alpha + q^2\beta - 1 = 0.$$

Les équations (1) et (2) devant être identiques, on aura

$$a = d = 0, \quad bc = 1,$$

$$c = \frac{\alpha}{\beta - 1}, \quad b = \frac{2 + 2\beta - \alpha}{\beta - 1}.$$

La relation $bc = 1$ donne

$$1 + \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 0;$$

c'est la condition pour que les deux coniques

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} - z^2 = 0$$

soient *capables* d'un triangle inscrit et circonscrit.

Désignons par $A_1, B_1, C_1$ les points de contact des côtés du triangle ABC avec son enveloppe; le côté BC ayant pour équation

$$px + qy - z = 0,$$

et la conique enveloppe

$$\frac{4p^2}{(b-1)^2} + q^2\left(\frac{b+1}{b-1}\right)^2 - 1 = 0,$$

les coordonnées du point $A_1$ seront

$$x_1 = p\frac{4}{(b-1)^2}, \quad y_1 = q\left(\frac{b+1}{b-1}\right)^2.$$

Or, l'équation du troisième degré en $t$ étant

$$t^3 + \lambda t^2 + bt + \frac{\lambda}{b} = 0,$$

on a

$$t + t' + t'' = -\lambda, \quad tt' + tt'' + t't'' = b, \quad tt't'' = \frac{-\lambda}{b};$$

mais

$$t + t' = \frac{2p}{q+1}, \quad tt' = \frac{1-q}{1+q},$$

d'où

$$q = \frac{1-tt'}{1+tt'}, \quad p = \frac{t+t'}{1+tt'},$$

ou, en introduisant la troisième racine $t''$,

$$q = \frac{1-t''^2}{1+t''^2}\,\frac{1-b}{1+b}, \quad p = t''\frac{b-1}{1+t''^2}.$$

On en conclut

$$x_1 = \frac{-2}{1-b}\,\frac{2t''}{1+t''^2}, \quad y_1 = \frac{1+b}{1-b}\,\frac{1-t''^2}{1+t''^2}.$$

Si donc on désigne par $x$ et $y$ les coordonnées du point A, on a les relations remarquables

$$x_1 = \frac{-2x}{1-b}, \quad y_1 = \frac{1+b}{1-b}y.$$

On voit l'analogie, au point de vue analytique, entre la droite $AA_1$ et la normale à la conique; on trouve facilement l'équation de l'enveloppe des droites $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, qui est

$$\left(\frac{x}{b-3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{2b}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2b} - \frac{1}{b-3}\right)^{\frac{2}{3}} z^{\frac{2}{3}}.$$

La transformation homographique rend compte de ce résultat; il suffit de considérer le système de deux coniques homofocales capables d'un triangle inscrit et circonscrit $A_1B_1C_1$ ; dans ce système, les droites $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ sont justement normales à l'ellipse décrite par les points $A_1$, $B_1$, $C_1$.

En reprenant le problème, proposons-nous de trouver le lieu du point O de concours des droites $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$. L'équation de la droite $AA_1$ est, en désignant par K et L les quantités $\frac{-2}{1-b}$ et $\frac{1+b}{1-b}$,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2t & 1-t^2 & 1+t^2 \\ 2t.K & L(1-t^2) & 1+t^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} x t^4(L-1) - 2t^3[y(1-K)+L-K] \\ -2t[y(1-K)-(L-K)] + x(1-L) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation, du quatrième degré en $t$, admet pour racines les valeurs $t$, $t'$, $t''$ et aussi une valeur $t'''$ correspondant à la quatrième tangente qu'on peut mener du point O à l'enveloppe des droites $AA_1$. On a donc

$$b - t'''\lambda = 0,$$

$$t''' - \lambda = \frac{2y(1-K)+2(L-K)}{x(L-1)},$$

$$\frac{-\lambda}{b} + bt''' = \frac{2y(1-K)-2(L-K)}{x(1-L)}.$$

On en déduit

$$x = \frac{b+3}{b+1}\,\frac{2\lambda}{b^2-\lambda^2},$$

$$y = \frac{b+3}{b+1}\,\frac{(b^2+\lambda^2)(1-b)}{b^2-\lambda^2},$$

ce qui donne, pour l'équation du lieu du point O,

$$\left(\frac{y}{1-b}\right)^2 - x^2 = \left(\frac{b+3}{b+1}\right)^2 z^2.$$

II. Nous allons montrer comment on peut passer du triangle inscrit et circonscrit à deux coniques à l'hexagone jouissant de la même propriété.

Soit O le point d'intersection des droites $x = 0$, $y = 0$, en conservant toutes les notations précédentes ; une droite passant par ce point a pour équation

$$y = mx$$

et rencontre la conique

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

en deux points auxquels correspondent les valeurs de $t$ données par l'équation

$$1 - t^2 - 2mt = 0,$$

et, si $t'$ et $t'_1$ sont les deux racines, on a

$$t' = \frac{-1}{t_1}.$$

Cela posé, considérons un triangle ABC qui se déplace en restant inscrit et circonscrit aux deux coniques

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$
$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} - z^2 = 0.$$

Soient $t$, $t'$, $t''$ les trois valeurs du paramètre qui correspondent aux sommets A, B, C. Les droites OA, OB, OC rencontrent la première conique en trois autres points A′, B′, C′, auxquels correspondent les valeurs

$$t_1 = \frac{-1}{t}, \quad t'_1 = \frac{-1}{t'}, \quad t''_1 = \frac{-1}{t''}.$$

Les six points A, B, C, A′, B′, C′ sont les sommets d'un hexagone qui se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques ; la première est la conique

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Proposons-nous de trouver l'équation de la seconde.

La droite AB′, qui correspond aux valeurs $t$ et $t'_1$, a pour équation

$$z = px + qy,$$

et l'on a

$$tt'_1 = \frac{1-q}{1+q}, \quad t + t'_1 = \frac{2p}{1+q}.$$

Mais les valeurs $t$ et $t'$ qui correspondent à A et B satisfont à la relation (R), qui est

$$t^2 t'^2 + c(t^2 + t'^2) + (c - b)tt' + 1 = 0,$$

et, comme on a

$$t' = \frac{-1}{t'_1},$$

la relation (R) devient

$$\frac{t^2}{t'^2_1} + c\left(t^2 + \frac{1}{t'^2_1}\right) - (c - b)\frac{t}{t'_1} + 1 = 0,$$

$$t^2 + t'^2_1 + ct^2 t'^2_1 + c - (c - b)tt'_1 = 0,$$

ou bien, en remplaçant $tt'_1$ et $t + t'_1$ par leurs valeurs en $p$ et $q$, on a, pour l'équation tangentielle de l'enveloppe des côtés de l'hexagone,

$$(3) \qquad 4p^2 + q^2(3c - b + 2) + (c + b - 2) = 0;$$

l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites qui joignent de deux en deux les sommets de l'hexagone, et qui n'est autre que la conique enveloppe des côtés du triangle ABC, est

$$(4) \qquad 4cp^2 + q^2(c + b + 2) - (c + b - 2) = 0;$$

il faut y joindre la relation $bc = 1$.

Les trois valeurs de $t$, qui correspondent aux points A, B, C, sont données par l'équation

$$t^3 + \lambda t^2 + bt + c\lambda = 0;$$

celles qui correspondent aux trois autres sommets sont données par l'équation

$$\frac{-1}{t^3} + \frac{\lambda}{t^2} - \frac{b}{t} + c\lambda = 0.$$

En faisant le produit des premiers membres, mis sous forme entière, et posant

$$\frac{\lambda^2 - b^2}{\lambda} = \mathrm{K},$$

on obtient, pour l'équation qui donne les six sommets,

$$t^6 + \mathrm{K}t^5 + \frac{2-b}{c}t^4 - t^3\frac{b^2+1}{b}\mathrm{K} + t^2\frac{b-2}{c} + t\mathrm{K} - 1 = 0.$$

Si l'on remplace $c$ par $\frac{1}{b}$ dans la relation que nous venons de trouver, et si l'on écrit les équations des coniques (3) et (4) en coordonnées homogènes, on peut énoncer les deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si l'on considère les deux coniques*

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{(b+1)^2} - \frac{z^2}{(b-1)^2} = 0,$$

1° *On a un système général de deux coniques telles qu'un triangle soit inscrit à la première et circonscrit à la seconde, et les paramètres qui définissent les trois sommets satisfont à l'équation*

$$t^3 + \lambda t^2 + bt + \frac{\lambda}{b} = 0;$$

2° *Les droites qui joignent les sommets du triangle aux points où les côtés opposés touchent leur enveloppe sont tangentes à la courbe*

$$\left(\frac{x}{b-3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{2b}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2b} - \frac{1}{b-3}\right)^{\frac{2}{3}} z^{\frac{2}{3}};$$

3° *Le point* O *de concours de ces droites décrit une conique ayant pour équation*

$$\frac{y^2}{(b+3)^2(b-1)^2} - \frac{x^2}{(b+3)^2} - \frac{z^2}{(b+1)^2} = 0.$$

Théorème II. — *Si l'on considère les trois coniques*

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{(b+1)^2} - \frac{z^2}{(b-1)^2} = 0,$$

$$\frac{x^2}{4b} + \frac{y^2}{3+2b-b^2} + \frac{z^2}{(b-1)^2} = 0,$$

1° *On a un système général de trois coniques, telles qu'un hexagone soit inscrit à la première et circonscrit à la troisième, en même temps que les droites qui joignent ses sommets de deux en deux restent tangentes à la seconde;*

2° *Les paramètres qui définissent les sommets de l'hexagone à chaque instant satisfont à l'équation*

$$t^6 + \mathrm{K}t^5 + b(2-b)t^4 - t^3\,\frac{b^2+1}{b}\,\mathrm{K}$$
$$- t^2 b(2-b) + t.\mathrm{K} - 1 = 0.$$

On peut déduire du procédé indiqué la relation qui doit exister entre les invariants $\Delta$, $\Delta'$, $\Theta$, $\Theta'$ de deux coniques pour qu'elles soient capables d'un hexagone inscrit et circonscrit; il suffit de former l'équation en $\lambda$ des deux coniques données plus haut et d'éliminer $b$ entre les relations d'identification de cette équation avec l'équation générale

$$\Delta\lambda^3 + \theta\lambda^2 + \theta'\lambda + \Delta' = 0.$$

III. On peut envisager le problème de l'hexagone inscrit et circonscrit à deux coniques à un point de vue différent.

Considérons, en effet, trois coniques ayant mêmes points communs et rapportées à leur triangle polaire commun,

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

$$(2) \qquad \alpha x^2 + \beta y^2 - z^2 = 0,$$

$$(3) \qquad \alpha' x^2 + \beta' y^2 - z^2 = 0,$$

avec la condition

$$\frac{1-\alpha}{1-\beta} = \frac{1-\alpha'}{1-\beta'} = A.$$

Déterminons les paramètres $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ de manière que les trois coniques soient telles qu'un hexagone inscrit à la première ait ses côtés tangents à la seconde, pendant que les droites qui joignent ses sommets de deux en deux touchent la troisième. Soit O le point de rencontre des droites $x = 0$, $y = 0$; on peut assujettir les diagonales de l'hexagone à passer en ce point; *elles formeront une involution du troisième ordre*, et, si l'une d'elles a pour équation $y = tx$, les trois valeurs de $t$ devront satisfaire à une équation de la forme

$$t^3 + \lambda t^2 + (a\lambda + b)t + c\lambda + d = 0,$$

dans laquelle $\lambda$ est le seul paramètre variable et définit à chaque instant la position de l'hexagone. Cette équation donne entre deux de ses racines la relation

$$(\mathrm{R})\quad \left\{\begin{aligned} & t^2t_1^2 + att_1(t+t_1) + c(t^2+t_1^2) \\ & \qquad + (c-b)tt_1 - d(t+t_1) + bc - ad = 0. \end{aligned}\right.$$

Si une droite AB ayant pour équation $y = mx$ rencontre la première conique en A et B, les droites OA et OB seront données par l'équation

$$x^2 + y^2 - (lx + my)^2 = 0,$$

et, si l'on pose $\frac{y}{x} = t$, cette équation donne

$$tt_1 = \frac{1-l^2}{1-m^2}, \quad t + t_1 = \frac{2lm}{1-m^2}.$$

Ces valeurs, transportées dans la relation (R), donnent

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & (1-l^2)^2 + c[4l^2m^2 - (1-l^2)(1-m^2)] \\ & \qquad - b(1-l^2)(1-m^2) + \ldots = 0. \end{aligned}\right.$$

L'équation (5) est l'équation tangentielle de l'enveloppe de AB; mais elle doit se décomposer, car elle représente l'enveloppe des droites qui joignent deux sommets quelconques, abstraction faite des diagonales. Les coniques (2) et (3) ont pour équations en coordonnées tangentielles

$$(6)\qquad \alpha m^2 + \beta l^2 - \alpha\beta = 0,$$

$$(7)\qquad \alpha' m^2 + \beta' l^2 - \alpha'\beta' = 0.$$

Donc l'équation (5) doit être identique, à un facteur $k$ près, au produit de ces deux équations; on en déduit

$$a = d = 0,$$

$$\alpha\alpha' = \mathrm{K}\,bc, \quad \alpha'\beta + \alpha\beta' = \mathrm{K}(3c - b),$$

$$\beta\beta' = \mathrm{K}, \quad \alpha + \alpha' = 2 - b - c,$$

$$\beta + \beta' = \frac{2bc - c - b}{bc}, \quad \mathrm{K}\,bc = 1 - b - c + bc.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1-\alpha}{1-\beta} = \frac{1-\alpha'}{1-\beta'} = \frac{2-\alpha-\alpha'}{2-\beta-\beta'} = bc = \mathrm{A}.$$

On trouve

$$\alpha' = \frac{\mathrm{KA}}{\alpha}, \quad \beta' = \frac{\mathrm{K}}{\beta},$$

$$\frac{\mathrm{A}\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = = 3c - b, \tag{8}$$

$$\alpha + \frac{\mathrm{KA}}{\alpha} = 2 - c - b. \tag{9}$$

$$\beta + \frac{\mathrm{K}}{\beta} = \frac{2bc - c - b}{bc}. \tag{10}$$

Posons $\alpha = \lambda\beta$ ; l'équation (8) devient

$$\lambda^2 - \lambda(3c - b) + bc = 0. \tag{11}$$

Les équations (9) et (10) donnent, en tenant compte des relations établies entre $b$, $c$ et $k$, *une seule et même équation*

$$\lambda^2 + \lambda\,\frac{(b+c)(1+bc) - 4bc}{bc + 1 - b - c} + bc = 0. \tag{12}$$

Les relations (11) et (12) doivent être identiques ; on en déduit la relation

$$3c^2 - 4bc^2 + 6bc - 4c - b^2 = 0. \tag{13}$$

Les quantités $\alpha$ et $\alpha'$ sont données par l'équation

$$\alpha + \frac{\mathrm{KA}}{\alpha} = 2 - b - c$$

ou bien

$$\alpha^2 + \alpha(b + c - 2) + 1 - b - c + bc = 0,$$

et les quantités $\beta$ et $\beta'$ par l'équation

$$\beta^2 + \beta\,\frac{b + c - 2bc}{bc} + \frac{1 - b - c + bc}{bc} = 0.$$

On aura tous les cas particuliers en joignant à la relation (13) telle relation que l'on voudra entre les paramètres $b$ et $c$.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème III. — *Si l'on considère une conique*

$$x^2+y^2-z^2=0,$$

*et trois droites*

$$y=tx,\quad y=t'x,\quad y=t''x,$$

*les paramètres* $t$, $t'$, $t''$ *satisfaisant à l'équation*

$$t^3+\lambda t^2+bt+c\lambda=0,$$

*$b$ et $c$ étant liés par la relation*

$$3c^2-4bc^2+6bc-4c-b^2=0,$$

1° *Ces trois droites sont les diagonales d'un hexagone, variable avec* $\lambda$, *inscrit dans la conique donnée et circonscrit à une seconde conique ;*

2° *Cet hexagone est circonscrit à une conique*

$$\alpha x^2+\beta y^2-z^2=0,$$

*et les droites qui joignent ses sommets de deux en deux sont tangentes à une conique*

$$\alpha' x^2+\beta' y^2-z^2=0;$$

3° *Les quantités* $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ *satisfont aux deux équations*

$$\alpha^2+\alpha(b+c-2)+1-b-c+bc=0,$$

$$\beta^2+\beta\frac{b+c-2bc}{bc}+\frac{1-b-c+bc}{bc}=0.$$

IV. Les considérations que nous venons de développer s'appliquent aux polygones inscrits et circonscrits à deux coniques, quel que soit le nombre de leurs côtés ;

mais les calculs deviennent de plus en plus compliqués à mesure que le nombre des côtés augmente. Laissant de côté le quadrilatère, dont les propriétés sont bien connues, nous allons nous occuper du pentagone inscrit et circonscrit à deux coniques.

Soit

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

l'équation de la conique à laquelle le pentagone est inscrit. Une droite ayant pour équation

$$px + qy - z = 0$$

rencontre cette courbe en deux points dont les paramètres $t$ sont donnés par l'équation

$$2pt + q(1 - t^2) - 1 - t^2 = 0,$$

et, si l'on désigne par $t$ et $t'$ les deux racines de cette équation, on aura

$$S = t + t' = \frac{2p}{q+1}, \quad P = tt' = \frac{1-q}{1+q}.$$

Toute relation entre P et S donnera une relation entre $p$ et $q$; donc *cette relation entre* P *et* S *pourra être considérée comme l'équation de la courbe enveloppe de la droite considérée.* Un calcul bien simple montre que, dans ce système particulier de coordonnées, une conique ayant même triangle conjugué que la conique donnée sera représentée par une équation de la forme

$$S^2 = \alpha(P^2 + 1) + \beta P.$$

Cela posé, si l'on considère sur la conique donnée cinq points variables qui seront les sommets d'un pentagone inscrit dans cette conique et circonscrit à une autre conique fixe, il existera entre les cinq valeurs de $t$

qui définissent ces points une équation de la forme

$$\begin{aligned}0 = t^5 + \lambda t^4 + (a_1\lambda + b_1)t^3 + (a_2\lambda + b_2)t^2 \\ + (a_3\lambda + b_3)t + a_4\lambda + b_4,\end{aligned}$$

et, si l'on désigne par $t$ et $t'$ deux *quelconques* des racines de cette équation, on aura entre ces racines la relation

$$\frac{t^5 + b_1 t^3 + b_2 t^2 + b_3 t + b_4}{t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4} = \frac{t'^5 + b_1 t'^3 + \ldots}{t'^4 + a_1 t'^3 + \ldots}.$$

Cette relation, mise sous forme entière, et après suppression du facteur $t - t'$, donne une relation rationnelle par rapport à S et P. D'après les théorèmes de Poncelet, les côtés du pentagone et les droites qui joignent les sommets de deux en deux enveloppent deux coniques ayant un triangle conjugué commun avec la conique dans laquelle le polygone est inscrit. Donc l'équation en S et P que nous venons de trouver représente l'ensemble de ces deux coniques, et, par suite, doit se décomposer en deux facteurs de la forme

$$S^2 - \alpha(P^2 + 1) - \beta P.$$

On en conclut que les termes de degré impair en S dans cette relation doivent disparaître, ce qui exige

$$a_1 = b_2 = a_3 = b_4 = 0;$$

la relation devient alors

$$\begin{aligned}S^4 a_4 + S^2[a_2 P^2 - (3a_4 + b_3)P + a_4 b_1] + P^4 \\ - (a_2 + b_1)P^3 + P^2(a_4 + a_2 b_1 + b_3) \\ + P(-a_4 b_1 - a_2 b_3) + a_4 b_3 = 0.\end{aligned}$$

Soit ABCDE un des pentagones considérés, et joignons tous ses sommets à l'un des sommets du triangle conjugué par des droites dont l'équation sera de la forme $y = mx$; ces droites rencontreront la conique circonscrite au pentagone en cinq autres points A′, B′, C′, D′, E′, qui seront les sommets d'un second pentagone inscrit et circonscrit aux trois mêmes coniques que le premier ; de plus, les paramètres $t_1$ qui correspondent aux sommets de ce second pentagone seront liés aux paramètres $t$ par la relation $tt_1 = -1$. Si donc, dans l'équation en $t$, on change $t$ en $\frac{-1}{t}$, elle devra rester la même, *sauf le changement de* $\lambda$ *en* $\lambda'$ ; en faisant le calcul, on trouve facilement les relations

$$a_4 = \frac{1}{b_3}, \quad a_2 = \frac{b_1}{b_3}.$$

Dès lors, nous n'avons plus que deux paramètres $b_1$ et $b_3$, entre lesquels existe une relation que nous allons déterminer.

Si, dans l'équation entre S et P, nous remplaçons $S^2$ par $\alpha(1 \pm P^2) + \beta P$, elle devra, pour des valeurs convenables de $\alpha$ et $\beta$, être identiquement satisfaite ; on obtient ainsi une équation du quatrième degré en P, qui doit être une identité, ce qui donne cinq équations de condition, qui, d'après notre raisonnement, devront se réduire à trois seulement : c'est ce qui arrive, en effet, car deux des équations trouvées se trouvent être les mêmes que deux autres et l'on a, pour déterminer $\alpha$ et $\beta$ et pour trouver la relation entre $b_1$ et $b_3$, les trois équations

$$\alpha^2 + b_1\alpha + b_3 = 0,$$
$$\beta^2 - (3 + b_3^2)\beta + b_1^2 + (b_3 - 1)^2 = 0,$$
$$2\alpha\beta - (3 + b_3^2)\alpha + b_1\beta - b_1 - b_1 b_3 = 0.$$

Si l'on tire $\alpha$ de la troisième, et qu'on porte cette valeur dans la première, on trouve une équation en $\beta$ dans laquelle les coefficients de $\beta^2$ et de $\beta$ sont les mêmes que dans la deuxième équation et l'on a immédiatement la relation cherchée entre $b_1$ et $b_3$, qui est

$$[b_1^2+(b_3-1)^2](4b_3-b_1^2)-b_3(3+b_3^2)^2=0.$$

L'équation qui lie les cinq valeurs de $t$ correspondant aux sommets du pentagone est

$$t^5+b_1t^3+b_3t+\frac{\lambda}{b_3}(b_3t^4+b_1t^2+1)=0.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème IV. — *Étant données trois coniques ayant pour équations*

$$x^2+y^2-z^2=0,$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\beta-2\alpha}-\frac{1}{\beta+2\alpha}=0,$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\beta'-2\alpha'}-\frac{1}{\beta'+2\alpha'}=0,$$

*si l'on a, entre les cinq valeurs de $t$ qui définissent cinq points de la première, la relation*

$$t^5+b_1t^3+b_3t+\frac{\lambda}{b_3}(b_3t^4+b_1t^2+1)=0,$$

*les cinq points considérés seront les sommets d'un pentagone, variable avec $\lambda$, inscrit dans la première conique, tandis que ses côtés et les droites qui joignent ses sommets de deux en deux seront tangents aux deux autres coniques; les valeurs $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ sont données par les équations*

$$\alpha^2+b_1\alpha+b_3=0,$$

$$\beta^2-(3+b_3^2)\beta+b_1^2+(b_3-1)^2=0,$$

*et les coefficients $b_1$ et $b_3$ sont liés par la relation*

$$[b_1^2+(b_3-1)^2](4b_3-b_1^2)-b_3(3+b_3^2)^2=0.$$

La méthode que nous avons exposée peut être étudiée d'une manière générale, en considérant $m$ points pris sur une conique et cherchant à quelle équation du degré $m$ en $t$, contenant un paramètre variable $\lambda$, doivent satisfaire les $m$ valeurs qui définissent ces points pour qu'ils soient les sommets d'un polygone circonscrit à une deuxième conique; algébriquement, le problème est ramené à la recherche des conditions pour qu'un polynôme en S et P admette un facteur de la forme

$$S^2 - \alpha(P^2 + 1) - \beta P.$$