ED. COLLIGNON

Note sur la résolution, au moyen de tableaux graphiques, de certains problèmes de cosmographie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 490-508
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__490_1>

NOTE SUR LA RÉSOLUTION, AU MOYEN DE TABLEAUX GRAPHIQUES, DE CERTAINS PROBLÈMES DE COSMOGRAPHIE;

PAR M. ED. COLLIGNON,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

Nous avons indiqué, par une Note insérée dans les *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII, 1879, la construction d'un Tableau graphique qui fait connaître à vue les heures du lever et du coucher du Soleil en un point quelconque du globe et à une époque quelconque de l'année. Ce Tableau peut servir aussi à déterminer l'heure du passage du Soleil dans le plan vertical est-ouest. On peut enfin le compléter de manière à tenir compte de la durée du crépuscule. La présente Note a pour objet l'étude de ces nouveaux problèmes. Nous y avons joint quelques recherches sur la détermination du crépuscule de moindre durée en un point donné de la Terre.

I.

Soient (1)

O le point du globe où se fait l'observation : nous le supposerons situé dans l'hémisphère boréal;

(1) Le lecteur est prié de faire les figures.

ON la tangente au méridien, dirigée vers le nord;
OZ la verticale ascendante, dirigée vers le zénith Z;
OE la tangente au parallèle, dirigée vers l'est;
P le pôle boréal:
L le point de l'horizon où le Soleil se lève;
K le point où le Soleil rencontre le plan vertical ZE dirigé de l'ouest à l'est.

L'arc de grand cercle PN est la latitude λ du lieu. L'arc $PL = PK$ est le complément de la déclinaison D du Soleil au jour de l'observation.

L'angle $ZPK = h$, converti en temps, à raison de 15° par heure, est l'angle horaire cherché. Il fait connaître combien d'heures séparent le passage du Soleil au point K et son passage au méridien.

Le triangle sphérique PZK a pour côtés $PZ = 90^\circ - \lambda$, $PK = 90^\circ - D$, et il est rectangle en Z. L'angle cherché h est compris entre les côtés PZ et PK; il sera donné par l'équation

$$\operatorname{tang} PK \cos h = \operatorname{tang} PZ,$$

ou bien

$$\cos h = \cot \lambda \operatorname{tang} D. \tag{1}$$

Si l'on cherche l'angle horaire $H = ZPL$ qui correspond au lever du Soleil, pour le même lieu et le même jour, on aura

$$\cos H = -\operatorname{tang} \lambda \operatorname{tang} D. \tag{2}$$

Pour passer de la première équation à la seconde, il suffit de changer h en H, et $\cot \lambda$ en $-\operatorname{tang}\lambda$, ce qui revient à changer λ en $90^\circ - \lambda$ et h en $180^\circ - H$.

Les solutions de l'équation (2) sont données à vue par le Tableau graphique des levers et des couchers du Soleil. Le même Tableau fera connaître les solutions de l'équation (1), moyennant qu'on fasse subir aux données et à l'inconnue les modifications convenables. Au lieu de prendre sur le Tableau l'horizontale qui correspond à la latitude donnée, on prendra l'horizontale qui correspond à la latitude complémentaire; on opérera comme si l'on voulait trouver l'heure du lever et du coucher du Soleil pour cette latitude au jour de l'observation, puis on substituera aux heures qu'on aura trouvées leurs différences avec 12^h, ce qui équivaut à prendre les heures telles qu'elles sont fournies par le Tableau, sauf à permuter ensemble les mots *soir* et *matin*.

Par exemple, on veut savoir à quelle heure le Soleil traversera le plan vertical est-ouest le jour du solstice d'été, pour la latitude de 60°.

On prendra sur le Tableau la latitude complémentaire, c'est-à-dire 30°; le Tableau montre que, pour cette latitude, le Soleil, au solstice d'été, se lève à $5^h 5^m$ matin, et se couche à $6^h 55^m$ soir (temps vrai). On en conclura immédiatement que le même jour, sous la latitude de 60°, le Soleil traverse le plan vertical est-ouest à $6^h 55^m$ *du matin*, et qu'il le retraverse à $5^h 5^m$ *du soir*, de sorte qu'il en éclaire pendant $10^h 10^m$ la face méridionale. Ces résultats ont été obtenus à l'aide d'un Tableau où le cercle des heures a un diamètre de $0^m,10$: l'erreur commise est de 2 minutes, environ; une telle approximation est plus que suffisante dans les problèmes usuels.

II.

Durée du crépuscule. — Le Soleil éclaire le lieu de l'observation, non seulement quand il est levé, mais avant son lever et après son coucher, tant qu'il est au-dessus d'un cercle parallèle à l'horizon, mené au-dessous à une certaine distance angulaire α, supposée connue.

Si l'on appelle L' le point où le Soleil rencontre ce cercle, qu'on pourrait appeler l'*horizon déprimé*, et

H′ l'angle horaire ZPL′, on aura pour déterminer H′ l'équation

$$(3)\qquad \begin{cases} \cos(90^\circ+\alpha) \\ \quad = -\sin\alpha = \sin D \sin\lambda + \cos D \cos\lambda \cos H', \end{cases}$$

fournie par le triangle ZPL′, où ZL′ est égal à $90^\circ+\alpha$.

L'angle horaire H du lever du Soleil est la valeur que prend l'angle H′ quand on fait $\alpha = 0$; la durée du crépuscule est la différence H′ — H réduite en temps.

L'angle H est donné par le tableau graphique en fonction de λ et de D ; pour en déduire H′, observons qu'on a, à la fois,

$$\sin D \sin\lambda + \cos D \cos\lambda \cos H' = -\sin\alpha,$$
$$\sin D \sin\lambda + \cos D \cos\lambda \cos H = 0.$$

Retranchant, il vient

$$(4)\qquad \cos H' - \cos H = -\frac{\sin\alpha}{\cos D \cos\lambda}.$$

Cette relation fait connaître la correction qu'il faut faire subir à cos H pour trouver cos H′, correction toujours négative, puisque le crépuscule, augmentant toujours l'angle H, diminue son cosinus. Il suffira donc de déplacer vers la droite la verticale dont les intersections avec le cercle donnent les heures du lever et du coucher du Soleil, pour obtenir une verticale qui fera connaître, de même, les heures du commencement de l'aurore et de la fin du crépuscule. La même méthode s'appliquerait à une dépression quelconque, α, de l'horizon apparent.

La valeur de cette correction est facile à calculer, ou mieux encore à construire. Soit A le centre d'un cercle de rayon égal à l'unité, du cercle du Tableau graphique par exemple ; soit M le point du diamètre horizontal de ce cercle qui correspond à l'angle horaire H, en sorte qu'on ait $\cos H = AM$, le segment AM portant avec lui son signe. Menons par le point A une ligne AN faisant avec le diamètre horizontal un angle $NAM = D$, puis par le même point une droite AP, faisant avec AN un angle $PAN = \lambda$, et avec AM un angle $PAM = \lambda + D$. Projetons M en m sur AN, et le point m en m' sur AP. Prenons sur AP, dans le sens Om', une longueur $m'n'$ égale à $\sin\alpha$; puis relevons le point n' en n sur AM, en menant $n'n$ perpendiculaire sur An', et le point n en M' sur le diamètre horizontal, en menant nM' perpendiculaire sur An. Le point M' sera le point cherché, pied de la verticale qui correspond à $\cos H'$.

Un diagramme construit une fois pour toutes permet d'éviter cette construction.

Dans l'équation (4) faisons

$$x = \cos H - \cos H', \quad y = \cos D;$$

cette équation prendra la forme

$$xy = \frac{\sin\alpha}{\cos\lambda},$$

et représentera une série d'hyperboles, qu'on peut supposer rapportées à deux axes rectangulaires asymptotes de toutes ces courbes. Le dénominateur $\cos\lambda$ est le paramètre qui définit chacune de ces hyperboles en particulier. Imaginons qu'on les ait construites pour diverses valeurs de la latitude λ, et qu'on ait pris pour échelle des abscisses x l'échelle qui sert à la construction du Tableau des heures du lever du Soleil; l'échelle des ordonnées y peut être prise arbitrairement. Si l'on trace sur cette nouvelle épure des horizontales $y = \cos D$, correspondant à différentes valeurs de la déclinaison D, les abscisses des points d'intersection de ces horizontales avec les hyperboles donneront, pour toutes les latitudes λ inscrites sur l'épure, les valeurs de la correction $x = \cos H - \cos H'$, c'est-à-dire de la quantité dont doit être déplacée vers la droite la verticale correspondant à l'angle H, pour donner celle qui correspond à H'.

Une circonstance particulière simplifie beaucoup cette épure : y, représentant le cosinus de la déclinaison du Soleil, ne peut varier qu'entre les limites

$$y = \cos 23^\circ 28' = 0,91729,$$

lorsque D atteint aux solstices ses limites extrêmes $\pm 23^\circ 28'$, et $y = 1$, pour $D = 0$, aux équinoxes. Deux horizontales menées aux distances 0,917 et 1,000 de l'axe des abscisses limitent donc la région utile du diagramme et y déterminent une bande assez étroite pour qu'on puisse, sans erreur importante, substituer des droites aux arcs d'hyperbole qu'on aurait à y tracer. La fin du crépuscule et le commencement de l'aurore sont des phénomènes dont on ne peut définir l'époque avec précision, la nuit et le jour se succédant par une série de variations insensibles; aussi une rigueur absolue n'est-elle pas de mise dans de tels calculs, et peut-on faire sans inconvénient la substitution de droites aux hyperboles.

Discussion de la formule. — On évalue en général l'angle α à 18° : c'est la limite extrême qui correspond à la plus grande durée du phénomène. C'est la valeur que nous adopterons dans ce qui suit. En pratique, s'il s'agit de déterminer la durée du jour effectif, il convient de réduire α à moitié environ, et de le prendre égal à 9°, au lieu de 18°. Cette évaluation résulte des observations faites sous les hautes latitudes où le Soleil se couche, et où néanmoins il n'y a plus de nuit à l'époque du solstice d'été. C'est vers la latitude de 57° que ce phénomène de nuits complètement claires commence à être constaté.

En adoptant cette valeur pour la latitude, on devra avoir à la fois

$$H' = 180^\circ, \quad \lambda = 57^\circ, \quad D = +23^\circ 28',$$

d'où résulte pour α

$$\alpha = 90^\circ - D - \lambda = 9^\circ 32',$$

qu'on peut réduire à 9° dans les applications usuelles. Les sinus de 9° et de 18° étant sensiblement dans le rapport de 1 à 2, on voit que la correction $\cos H' - \cos H$, calculée pour $\alpha = 18^\circ$, devra être réduite à moitié si l'on fait $\alpha = 9^\circ$; elle devrait être réduite aux $\frac{7}{13}$ de sa valeur si l'on faisait $\alpha = 9^\circ 32'$. Généralement le diagramme des corrections, construit pour une valeur de l'angle α, pourra s'appliquer à toute autre valeur de cet angle moyennant une réduction des abscisses x dans le rapport des sinus des deux valeurs de l'angle α.

Reprenons les formules

$$(2) \qquad \cos H = -\operatorname{tang}\lambda \operatorname{tang} D,$$

$$(5) \qquad \cos H' = \cos H - \frac{\sin\alpha}{\cos\lambda \cos D},$$

où nous ferons α égal à 18°, λ positif et $< 90^\circ$, et où nous ferons varier D de $-23^\circ 28'$ à $+23^\circ 28'$.

L'angle H sera réel si λ est moindre que le complément de la plus grande valeur de D, c'est-à-dire entre les limites $\lambda = 0^\circ$ et $\lambda = 66^\circ 32'$, qui correspondent à l'équateur et au cercle polaire. Pour les valeurs de λ comprises entre $66^\circ 32'$ et 90°, H devient imaginaire, et le Soleil ne se couche plus, ou ne se lève plus, pour certaines valeurs de la déclinaison D.

L'angle H', pour une latitude donnée, sera réel si $\cos H'$ est compris entre -1 et $+1$, et les valeurs extrêmes de la déclinaison D qui laissent réel l'angle H' s'obtiendront en remplaçant dans l'équation (5) $\cos H'$

par ces limites. Il vient, en désignant par D′ et D″ les valeurs cherchées de la déclinaison, les deux équations suivantes,

$$-\operatorname{tang}\lambda \operatorname{tang}D' - \frac{\sin\alpha}{\cos\lambda\cos D'} = 1$$

et

$$-\operatorname{tang}\lambda \operatorname{tang}D'' - \frac{\sin\alpha}{\cos\lambda\cos D''} = -1,$$

ou bien

$$\cos(\lambda - D') = -\sin\alpha$$

et

$$\cos(\lambda + D'') = \sin\alpha$$

équations qui donnent

$$\lambda + D'' = 90^\circ - \alpha \quad \text{ou} \quad D'' = 90^\circ - \lambda - \alpha = 72^\circ - \lambda$$

et

$$\pm(\lambda - D') = 90^\circ + \alpha, \quad D' = \lambda \mp (90^\circ + \alpha) = \lambda \mp 108^\circ.$$

Substituant ensuite à D″ et à D′ les valeurs extrêmes de D, on aura les limites correspondantes de λ ; on a d'abord

$$\lambda = 72^\circ - D'' = \begin{cases} 72^\circ - 23^\circ 28' = 48^\circ 32' \\ 72^\circ + 23^\circ 28' = 95^\circ 28' > 90^\circ. \end{cases}$$

La première valeur est admissible pour λ. La seconde, supérieure à 90°, doit être rejetée. On voit qu'à partir de la latitude de 48° 32′, c'est-à-dire à peu près la latitude de Paris, jusqu'au pôle, le crépuscule rejoint l'aurore lorsque la déclinaison du Soleil est voisine de sa valeur maximum.

De même on aura, pour la seconde limite,

$$\lambda = D' \pm 108^\circ = \begin{cases} \overset{\circ}{+23}\,\overset{\prime}{28} + \overset{\circ}{108} & \text{inadmissible} > 90^\circ \\ -23\ 28 + 108 = 84^\circ 32' & \\ +23\ 28 - 108 & \text{inadmissible} < 0^\circ \\ -23\ 28 - 108 & \text{inadmissible} < 0^\circ. \end{cases}$$

Jusqu'à la latitude de $84°32'$, il y a un crépuscule chaque jour de l'année; plus près du pôle, la nuit est complète dès que le Soleil s'approche suffisamment du solstice d'hiver.

Cette discussion fait ressortir deux latitudes particulières, $48°32'$ et $84°32'$; la première indique le point du globe où le crépuscule peut rejoindre l'aurore au moins un jour par an; la seconde, le point du globe où il y a absence de crépuscule et d'aurore au moins un jour par an. Entre le cercle polaire $66°32'$ et la latitude de $84°32'$, le Soleil, constamment couché une fois qu'il est parvenu dans l'hémisphère austral, éclaire encore chaque jour l'horizon du lieu par ses rayons réfractés; le jour est crépusculaire.

III.

Crépuscule minimum. — La durée $H' - H$ du crépuscule variant, en général, avec la déclinaison D du Soleil, proposons-nous de chercher la déclinaison D qui rend minimum cette durée, en un point du globe donné par sa latitude λ [1].

Nous aurons à la fois les équations

$$\sin D \sin\lambda + \cos D \cos\lambda \cos H' = -\sin\alpha, \tag{6}$$

$$\sin D \sin\lambda + \cos D \cos\lambda \cos H = 0, \tag{7}$$

où D, H et H' sont des variables que nous ne supposerons d'abord assujetties à aucune restriction. La condition du minimum de la différence $H' - H$ est

$$dH' = dH.$$

---

[1] On trouvera la solution géométrique de cette question dans l'*Analyse des infiniment petits* du marquis de l'Hospital, exemple XIII § 61

Différentions les équations (6) et (7) en laissant α et λ constants. Il viendra

$$\sin\lambda \cos D\, dD - \cos\lambda \cos H' \sin D\, dD - \cos D \cos\lambda \sin H'\, dH' = 0,$$
$$\sin\lambda \cos D\, dD - \cos\lambda \cos H \sin D\, dD - \cos D \cos\lambda \sin H\, dH = 0.$$

Entre ces deux équations, éliminons le rapport $\frac{dH}{dD}$, et nous aurons, pour la condition du minimum,

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sin\lambda \cos D - \cos\lambda \sin D \cos H'}{\sin\lambda \cos D - \cos\lambda \sin D \cos H} \\ &\quad = \frac{\cos D \cos\lambda \sin H'}{\cos D \cos\lambda \sin H} = \frac{\sin H'}{\sin H}. \end{aligned} \right.$$

De cette équation chassons $\cos H'$ et $\cos H$ au moyen des équations (6) et (7). On obtient

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sin\lambda \cos D - \cos\lambda \sin D \left(\dfrac{-\sin\alpha - \sin D \sin\lambda}{\cos D \cos\lambda}\right)}{\sin\lambda \cos D - \cos\lambda \sin D \left(-\dfrac{\sin D \sin\lambda}{\cos D \cos\lambda}\right)} = \frac{\sin H'}{\sin H} \\ &\quad = \frac{\sin\lambda \cos^2 D + \sin D \sin\alpha + \sin^2 D \sin\lambda}{\sin\lambda \cos^2 D + \sin^2 D \sin\lambda} = \frac{\sin\lambda + \sin D \sin\alpha}{\sin\lambda}. \end{aligned} \right.$$

Il reste à éliminer H et H' entre les équations (6), (7) et (9). L'équation finale sera la relation cherchée entre D et λ.

Élevons au carré l'équation (9), et remplaçons $\sin^2 H$ et $\sin^2 H'$ par $1 - \cos^2 H$ et $1 - \cos^2 H'$; il viendra

$$\left(\frac{\sin\lambda + \sin D \sin\alpha}{\sin\lambda}\right)^2 = \frac{1 - \cos^2 H'}{1 - \cos^2 H}$$
$$= \frac{1 - \left(\dfrac{\sin\alpha + \sin D \sin\lambda}{\cos D \cos\lambda}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{\sin D \sin\lambda}{\cos D \cos\lambda}\right)^2}$$

ou bien

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &1-\left(\frac{\sin\alpha+\sin D\sin\lambda}{\cos D\cos\lambda}\right)^2\\ &\quad=\left(1+\frac{\sin D\sin\alpha}{\sin\lambda}\right)^2\left[1-\left(\frac{\sin D\sin\lambda}{\cos D\cos\lambda}\right)^2\right].\end{aligned}\right.$$

Avant de réduire à sa plus simple expression cette équation (10), observons qu'elle est plus générale que l'équation (9), puisqu'elle résulte de l'élévation de celle-ci au carré; elle comprend, outre l'équation (9),

$$\frac{\sin\lambda+\sin D\sin\alpha}{\sin\lambda}=\frac{\sin H'}{\sin H},$$

l'équation

$$\frac{\sin\lambda+\sin D\sin\alpha}{\sin\lambda}=-\frac{\sin H'}{\sin H},$$

qui est étrangère à la question.

Multiplions l'équation (10) par le produit $\cos^2 D\cos^2\lambda$. Le premier membre devient, en développant le carré,

$$\begin{aligned}&\cos^2 D\cos^2\lambda-(\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin D\sin\lambda+\sin^2 D\sin^2\lambda)\\ &\quad=1-\sin^2 D-\sin^2\lambda-\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin D\sin\lambda.\end{aligned}$$

La seconde parenthèse du second membre, transformée de même, se déduira du premier membre en y faisant $\alpha=0$, ce qui donne

$$1-\sin^2 D-\sin^2\lambda;$$

cette fonction doit être multipliée par le facteur

$$1+2\frac{\sin D\sin\alpha}{\sin\lambda}+\frac{\sin^2 D\sin^2\alpha}{\sin^2\lambda};$$

le produit est

$$\begin{aligned}&1-\sin^2 D-\sin^2\lambda+\frac{2\sin D\sin\alpha}{\sin\lambda}-2\frac{\sin^3 D\sin\alpha}{\sin\lambda}\\ &\quad-2\sin D\sin\alpha\sin\lambda\\ &\quad+\frac{\sin^2 D\sin^2\alpha}{\sin^2\lambda}-\frac{\sin^4 D\sin^2\alpha}{\sin^2\lambda}-\sin^2 D\sin^2\alpha,\end{aligned}$$

et l'équation (10) devient, après réduction et après la multiplication par $\frac{\sin^2\lambda}{\sin^2\alpha}$, inverse du coefficient de $\sin^4 D$,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}&\sin^4 D + \frac{2\sin\lambda}{\sin\alpha}\sin^3 D\\ &\qquad - \cos^2\lambda\sin^2 D - \frac{2\sin\lambda}{\sin\alpha}\sin D - \sin^2\lambda = 0,\end{aligned}\right.$$

équation du quatrième degré en $\sin D$; elle a ses quatre racines réelles, et il est aisé de les obtenir.

On aperçoit sur-le-champ qu'elle admet pour racines $+1$ et -1; on a, en effet, en remplaçant $\sin D$ par ± 1,

$$1 \pm \frac{2\sin\lambda}{\sin\alpha} - \cos^2\lambda \mp \frac{2\sin\lambda}{\sin\alpha} - \sin^2\lambda = 0,$$

ce qui se réduit à une identité. On pourra donc diviser le polynôme de l'équation (11) par le facteur $\sin^2 D - 1$, ce qui amène l'équation du second degré

$$(12)\qquad \sin^2 D + \frac{2\sin\lambda}{\sin\alpha}\sin D + \sin^2\lambda = 0.$$

On en déduit

$$\sin D = -\frac{\sin\lambda}{\sin\alpha} \pm \sqrt{\frac{\sin^2\lambda}{\sin^2\alpha} - \sin^2\lambda} = -\sin\lambda\left(\frac{1 \pm \cos\alpha}{\sin\alpha}\right).$$

Si l'on prend le signe supérieur, il vient

$$\sin D = -\sin\lambda\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\sin\lambda\cot\frac{\alpha}{2};$$

et avec le signe inférieur,

$$\sin D = -\sin\lambda\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\sin\lambda\,\mathrm{tang}\frac{\alpha}{2}.$$

Les quatre racines de l'équation (11) sont donc

$$-1,\quad +1,\quad -\sin\lambda\cot\frac{\alpha}{2},\quad -\sin\lambda\,\mathrm{tang}\frac{\alpha}{2}.$$

Les deux premières racines font la déclinaison égale à $\pm 90^\circ$, et placent le Soleil à l'un des pôles; elles rendent imaginaires les angles H et H′, et ne donnent pas une solution du problème. Restent les deux racines

$$-\sin\lambda \cot\frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad -\sin\lambda \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2},$$

qui satisfont toutes deux à l'équation (12), et dont l'une se déduit de l'autre en changeant α en $180^\circ-\alpha$; ce qui résulte en effet de ce que l'angle α entre dans les équations (11) et (12) par son sinus, lequel correspond aussi bien à l'angle donné α qu'à son supplément $180^\circ-\alpha$.

Ces deux racines satisfont à l'équation (11), mais elles ne satisfont pas toutes deux à l'équation (9) qui est la traduction exacte du problème. Substituons, en effet, à $\sin D$ dans l'équation (9) la valeur $-\sin\lambda\cot\frac{\alpha}{2}$, puis la valeur $-\sin\lambda \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$; il viendra

$$\frac{\sin H'}{\sin H} = \frac{\sin\lambda + \left(-\sin\lambda\cot\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha}{\sin\lambda}$$
$$= 1 - 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = -\cos\alpha$$

quand on adopte la première racine, et

$$\frac{\sin H'}{\sin H} = \frac{\sin\lambda + \left(-\sin\lambda\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha}{\sin\lambda}$$
$$= 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha,$$

quand on adopte la seconde.

Or $\cos\alpha$ est toujours positif; les angles H et H′, s'ils sont réels, sont toujours compris entre 0° et 180°; leurs sinus sont positifs, et par conséquent la seconde racine n'entraîne aucune impossibilité, tandis que la première, au lieu de satisfaire à l'équation (9), satisfait à la relation conjuguée

$$\frac{\sin\lambda + \sin D \sin\alpha}{\sin\lambda} = -\frac{\sin H'}{\sin H},$$

et est étrangère à la question.

En définitive, le problème n'a qu'une solution, savoir :

$$(13) \qquad \sin D = -\sin\lambda \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2},$$

toujours admissible, puisque $\sin\lambda$ est au plus égal a l'unité, et que $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$, égal à $\operatorname{tang} 9^\circ$, est moindre que la plus grande valeur absolue qu'on puisse attribuer à $\sin D$; et pour le crépuscule minimum, l'angle H' est donné en fonction de H par la relation

$$(14) \qquad \sin H' = \sin H \cos\alpha,$$

avec la condition d'être plus grand que H, ce qui fait disparaître toute ambiguïté dans la détermination de cet angle H'.

De ces formules il est aisé de déduire la valeur de $\sin\frac{H'-H}{2}$, lorsque la durée du crépuscule est minimum.

On a, en effet,

$$\cos H' - \cos H = -2\sin\frac{H'+H}{2}\sin\frac{H'-H}{2}$$
$$= -\frac{\sin\alpha}{\cos\lambda\cos D},$$

$$\sin H' + \sin H = 2\sin\frac{H'+H}{2}\cos\frac{H'-H}{2} = \sin H(1+\cos\alpha).$$

Divisant la première équation par la seconde, il vient

$$\tang \frac{H'-H}{2} = \frac{\sin\alpha}{\cos\lambda\cos D\sin H(1+\cos\alpha)} = \frac{\tang\frac{\alpha}{2}}{\cos\lambda\cos D\sin H}.$$

Remplaçons dans cette relation $\cos D$ par sa valeur

$$\sqrt{1-\sin^2\lambda\tang^2\frac{\alpha}{2}}$$

et $\sin H$ par

$$\sqrt{1-\cos^2 H}$$

ou bien par

$$\sqrt{1-\tang^2\lambda\tang^2 D} = \sqrt{\frac{1-\sin^2\lambda\tang^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\lambda\tang^2\lambda\tang^2\frac{\alpha}{2}}{1-\sin^2\lambda\tang^2\frac{\alpha}{2}}};$$

il viendra

$$\tang\frac{H'-H}{2}$$

$$= \frac{\tang\frac{\alpha}{2}}{\cos\lambda\sqrt{1-\sin^2\lambda\tang^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\lambda\tang^2\lambda\tang^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \frac{\tang\frac{\alpha}{2}}{\cos\lambda\sqrt{1-\sin^2\lambda\tang^2\frac{\alpha}{2}(1+\tang^2\lambda)}}$$

$$= \frac{\tang\frac{\alpha}{2}}{\cos\lambda\sqrt{1-\tang^2\lambda\tang^2\frac{\alpha}{2}}},$$

puisque $1+\tang^2\lambda = \frac{1}{\cos^2\lambda}$

Cette équation donne $\frac{H'-H}{2}$ par sa tangente. Mais il est plus simple de chercher son sinus : or on en déduit

$$(15)\left\{\begin{aligned}
&\sin\frac{H'-H}{2}\\
&=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\tan^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\lambda\left(1-\tan^2\lambda\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)}}\\
&=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\tan^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\lambda-\sin^2\lambda\tan^2\frac{\alpha}{2}}}\\
&=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\left(1+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)(1-\sin^2\lambda)}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\lambda}.
\end{aligned}\right.$$

Pour que le crépuscule minimum soit réel, il faut et il suffit que $\sin\frac{H'-H}{2}$ soit moindre que l'unité, ou que $\cos\lambda$ soit plus grand que $\sin\frac{\alpha}{2}$, ou enfin que l'on ait

$$\lambda < 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

c'est-à-dire, pour $\alpha = 18^\circ$, $\lambda < 81^\circ$, de sorte qu'il n'y a de crépuscule minimum, au point de vue analytique, que si la latitude est au plus égale à 81°.

Des considérations géométriques font retrouver facilement les équations (14) et (15).

Considérons sur la sphère les deux triangles sphériques ZPL et ZPL′, qui ont pour côtés, l'un

$$ZP = 90^\circ - \lambda,$$
$$ZL = 90^\circ,$$
$$PL = 90^\circ - D,$$

et l'autre

$$ZP = 90^\circ - \lambda,$$
$$ZL' = 90^\circ + \alpha,$$
$$PL' = 90^\circ - D;$$

l'angle H est, dans le premier, opposé au côté ZL, et l'angle H', dans le second, est opposé au côté ZL'. Désignons par L et L' les angles des deux triangles opposés au côté ZP. Il viendra

$$\cos L = \frac{\sin\lambda}{\cos D},$$

$$\cos L' = \frac{\sin\lambda + \sin\alpha \sin D}{\cos\alpha \cos D},$$

ou bien, si l'on remplace $\sin D$ par $-\sin\lambda \tang\frac{\alpha}{2}$,

$$\cos L' = \frac{\sin\lambda\left(1 - \sin\alpha \tang\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha \cos D} = \frac{\sin\lambda}{\cos D} = \cos L,$$

puisque $1 - \sin\alpha \tang\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha$. On en déduit $L = L'$. Sur le côté ZL', opposé à l'angle H', prenons $ZZ' = \alpha$, et menons l'arc de grand cercle PZ'. Les deux triangles PZL, PZ'L' auront un angle égal, $L = L'$, compris entre côtés égaux chacun à chacun,

$$L'Z' = 90^\circ = LZ, \quad L'P = LP;$$

donc l'un peut être considéré comme étant une seconde position de l'autre, qu'on aurait fait tourner sur la sphère autour du point P, dans le sens convenable, d'un angle $ZPZ' = LPL' = H' - H$. Le triangle ZPZ' a donc le côté PZ égal au côté PZ', et l'angle compris est égal à $H' - H$. L'arc de grand cercle PI, qui coupe cet angle en deux parties égales, partage la base en deux segments égaux, et le triangle en deux triangles rectangles en I, qui ont pour hypoténuse $PZ = PZ' = 90° - \lambda$ et pour côté de l'angle droit $ZI = Z'I = \frac{\alpha}{2}$. L'angle opposé à ce côté est $\frac{H'-H}{2}$, et l'on retrouve l'équation (15) $\sin\frac{H'-H}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\lambda}$. La construction précédente est connue sous le nom de *construction de Cagnoli*.

L'équation (14) résulte de la comparaison des deux triangles ZLP et ZL'P, pour lesquels la proportion des sinus donne les relations

$$\frac{\sin H'}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{\sin L'}{\sin(90° - \lambda)} = \frac{\sin L}{\cos\lambda},$$

puisque

$$\sin L' = \sin L.$$

Mais

$$\sin H = \frac{\sin L}{\cos\lambda};$$

donc

$$\sin H' = \sin H \sin(90° + \alpha) = \sin H \cos\alpha,$$

c'est-à-dire l'équation (14).

La recherche du crépuscule minimum se ramène facilement à des constructions géométriques.

Décrivons un cercle d'un point C comme centre avec un rayon égal à l'unité; menons par le point C deux diamètres rectangulaires AA', BB'. Prenons sur le quadrant AB un arc AM égal à la latitude λ; projetons le point M en N sur le diamètre BB', et par le point N menons NP, faisant avec BB' l'angle PNB' égal à $\frac{\alpha}{2}$. Soit P l'intersection de cette droite avec le premier diamètre CA. Nous avons

$$CP = CN \times \tang\frac{\alpha}{2} = \sin\lambda \tang\frac{\alpha}{2}.$$

Donc CP est, en valeur absolue, le sinus de la déclinaison D qui assure le moindre crépuscule. Il suffit de mener par le point P une parallèle PQ à BB′ jusqu'à la rencontre de la circonférence, pour avoir en B′Q un arc égal à la valeur absolue de D. Quant aux signes, on saura que D et λ sont toujours de signes contraires.

Connaissant D, on pourra en déduire la correction de $\cos H$ et se servir des diagrammes pour déterminer H′. On peut aussi se rappeler que, lorsque le crépuscule est minimum, $\sin H' = \sin H \cos \alpha$. Il n'y aura donc qu'à projeter le sinus de l'angle H, donné par le diagramme, sur une oblique faisant, avec les verticales, un angle égal à α; la projection ramenée à être verticale, et déplacée ensuite parallèlement vers la droite jusqu'à ce qu'elle devienne une ordonnée du cercle, fera connaître la valeur de l'angle H′ cherché.