H. RESAL

Sur les propriétés mécaniques de la Lemniscate

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 481-490

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__481_0>

SUR LES PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES DE LA LEMNISCATE;

PAR M. H. RESAL.

1. *Préliminaires.* — On sait que la lemniscate de Jacques Bernoulli est un cas particulier de l'ellipse de Cassini, et qu'elle est définie par la condition que le produit des distances de chacun de ses points m à deux points fixes ou *foyers* F, F' est égal au carré de la moitié k de la distance focale.

Prenons pour origine des coordonnées le milieu O de FF'; pour axe des x la direction de la distance focale. On trouve facilement, pour l'équation de la courbe,

$$(x^2+y^2)^2+2k^2(y^2-x^2)=0.$$

Soient r le rayon vecteur Om, φ l'angle qu'il forme avec Ox, et posons

$$k=\frac{a}{\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Nous aurons, pour l'équation polaire de la courbe,

$$r^2=a^2\cos 2\varphi.$$

La lemniscate est formée de deux boucles qui se réunissent à l'origine par un point double.

Il nous sera plus commode, dans ce qui suit, de substituer aux axes coordonnés ci-dessus les droites qui sont respectivement inclinées sur eux de l'angle de 45°, et, en désignant par θ l'angle formé par r avec le nouvel axe des x, nous aurons

$$\varphi=45^\circ-\theta,$$

$$r^2=a^2\sin 2\theta, \tag{2}$$

$$r=a\sqrt{\sin 2\theta}, \tag{3}$$

$$dr=\frac{a\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}d\theta. \tag{4}$$

1° *Tangente.* — On a

$$r\frac{d\theta}{dr} = \operatorname{tang} 2\theta,$$

ce qui exprime que *la tangente forme, avec le rayon vecteur, un angle égal au double de l'angle polaire.* On voit ainsi que les axes sont tangents en O à la courbe.

2° *Sous-tangente.* — Elle a pour expression

$$r\sin 2\theta = \frac{r^3}{a^2}.$$

3° *Rectification.* — Si ds est l'élément de la courbe, on a

$$dr = ds\cos 2\theta;$$

d'où, en vertu de l'équation (4),

$$(5)\qquad ds = \frac{a\,d\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}},$$

$$s = a\int\frac{d\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}.$$

Si nous posons

$$\sin 2\theta = \cos^2\alpha,$$

on a

$$d\theta = -\frac{\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{1-\cos^4\alpha}} = -\frac{\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = -\frac{\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\alpha}}$$

et

$$s = -\frac{a}{\sqrt{2}}\int\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\alpha}} = -k\int\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\alpha}},$$

fonction elliptique de première espèce, dont le module est $\sqrt{\frac{1}{2}}$. On retombe ainsi sur une formule de M. Serret.

4° *Rayon de courbure.* — L'angle formé par la tangente avec Ox étant 3θ, l'angle de contingence est $3\,d\theta$. Nous avons, en nous reportant à la formule (5), pour le rayon de courbure,

$$\rho = \frac{ds}{3\,d\theta} = \frac{a}{3\sqrt{\sin 2\theta}}, \tag{6}$$

ou encore

$$\rho = \frac{a^2}{3r}. \tag{6'}$$

5° *Quadrature.*—L'aire comprise entre la courbe Ox et un rayon vecteur quelconque a pour expression

$$A = \frac{1}{2}\int_0^\theta r^2\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^\theta \sin 2\theta = \frac{a^2}{4}\sin^2\theta. \tag{7}$$

Pour une boucle entière $\theta = 90°$, d'où la valeur connue

$$A = \frac{a^2}{4}.$$

2. Théorème de Saladini (¹). — *Quelle est, parmi toutes les courbes comprises dans un même plan vertical ayant une même origine, celle pour laquelle un point pesant partant du repos en cette origine parcourt un arc de longueur quelconque dans le même temps qu'il mettrait à décrire la corde correspondante.*

(¹) *Memorie del Istituto nazionale italiano*, t. I, p. 49 (1804). Fuss, en 1815 (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. IX), a donné, du théorème, une solution analytique plus simple que celle de Saladini.

Enfin, en 1857 (*Mémoires de la Société d'émulation du Doubs*), sans connaître les auteurs précédents, je me suis posé la question, et je l'ai résolue géométriquement. J'ai reproduit cette solution géométrique dans mon *Traité de Cinématique pure*, et dans mon *Traité de Mécanique générale*. t. I.

Soient

Ox la verticale du point de départ O;
r le rayon vecteur d'un point quelconque m de la courbe;
θ l'angle que forme ce rayon avec Ox;
θ_0 la valeur de cet angle en O.

L'équation des forces vives appliquée au mouvement du point sur la courbe devient, en désignant par v la vitesse,

$$(8) \qquad v^2 = \frac{r^2 d\theta^2 + dr^2}{dt^2} = 2gr\cos\theta,$$

d'où, pour le temps employé à parcourir l'arc Om,

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}{2gr\cos\theta}}\, d\theta.$$

Le temps qui serait employé à parcourir la corde Om sera donné par

$$r = g\cos\theta\,\frac{t^2}{2},$$

d'où

$$(9) \qquad t = \sqrt{\frac{2r}{g\cos\theta}}.$$

Égalant les deux valeurs de t que nous venons de trouver, il vient

$$2\sqrt{\frac{r}{\cos\theta}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}{r\cos\theta}}\, d\theta;$$

d'où, par la différentiation par rapport à θ,

$$\frac{\cos\theta\frac{dr}{d\theta} + \sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}.$$

Si l'on élève au carré, on obtient

$$r\frac{d\theta}{dr} = \tan 2\theta,$$

ce qui est l'équation différentielle des lemniscates dont O est le centre, dont l'axe est incliné de 45° sur la verticale, et qui sont représentées d'une manière générale par l'équation (2).

En portant la valeur de r déduite de cette dernière équation dans la formule (9), on trouve, pour la durée du parcours de l'arc Om,

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g\cos\theta}\sqrt{\sin 2\theta}} = 2\sqrt{\frac{a}{g\sqrt{2}}}\sqrt[4]{\tan\theta}.$$

Si la courbe est l'axe d'un tuyau ayant une section infiniment petite, dans lequel le mobile est assujetti à circuler, on voit que ce mobile ne reviendra jamais au point de départ O, puisque t est infini pour $\theta = 90°$.

Supposons maintenant que le tuyau soit remplacé par un canal ouvert à l'intérieur de la boucle, et soit N la pression exercée par le mobile sur la courbe; nous aurons, en remarquant que la composante normale de la pesanteur est $g\sin 3\theta$,

$$N = \frac{v^2}{\rho} + g\sin 3\theta,$$

ou, en remplaçant ρ, v^2, r par leurs valeurs (6), (8) et (3),

$$N = g(6\cos\theta\sin 2\theta + \sin 3\theta) = g\sin\theta(15 - 16\sin^2\theta).$$

La pression sera donc nulle au point de départ, croîtra avec θ jusqu'au moment où l'on aura

$$\sin\theta = \frac{1}{4}\sqrt{5}, \quad \text{d'où} \quad \theta = 53°59'.$$

Le maximum de N sera ainsi

$$N = \frac{g}{2}\sqrt{5} = 1,1187g.$$

A partir de là, N décroîtra et deviendra nul pour

$$\sin\theta = \frac{1}{4}\sqrt{15}, \quad \text{d'où} \quad \theta = 74^\circ 58'.$$

Cette valeur de θ déterminera la position du *point d'échappement ;* le mobile arrivé en ce point quittera la courbe et, en vertu de la vitesse acquise et de la pesanteur, tombera dans l'intérieur de la boucle en décrivant une parabole.

J'espère pouvoir bientôt mettre en évidence, au moyen d'un appareil spécial, quelques-unes des propriétés mécaniques qui viennent d'être démontrées.

3. Théorème de M. O. Bonnet [1]. — *Quelle est, parmi toutes les courbures ayant une origine commune, celle pour laquelle un mobile partant de cette origine sans vitesse initiale, soumis à l'action d'une force dirigée vers un centre fixe et proportionnelle à la distance, décrirait un arc quelconque dans le même temps qu'il mettrait à parcourir la corde correspondante ?*

Soient

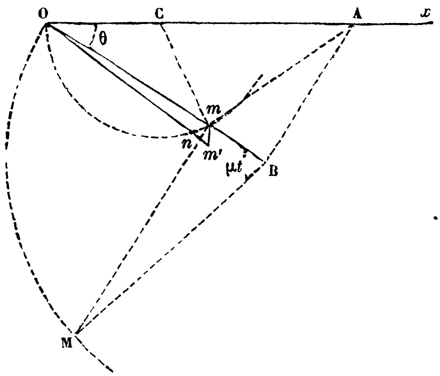
O le point de départ pris pour origine polaire ;
A le centre d'attraction ;
$r = Om$ un rayon vecteur d'un point quelconque m de la courbe ;
θ l'angle qu'il forme avec OA ;
θ_0 sa valeur au point O ;

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. IX ; 1844.

$\mu^2.\overline{Am}$ l'attraction exercée sur m, μ étant une constante;

l la distance OA.



Le principe des forces vives donne

$$\frac{r^2\,d\theta^2 + dr^2}{dt^2} = \mu^2(2\,l\cos\theta - r^2);$$

or,

$$\overline{Am}^2 = l^2 + r^2 - 2\,lr\cos\theta;$$

par suite,

$$\frac{r^2\,d\theta^2 + dr^2}{dt^2} = \mu^2(2\,lr\cos\theta - r^2); \tag{10}$$

On déduit de là, pour le temps employé par le mobile à décrire l'arc Om,

$$t = \frac{1}{\mu}\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{\frac{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}{2\,lr\cos\theta - r^2}}\,d\theta. \tag{11}$$

En ce qui concerne le parcours de la corde Om, il suffit de supposer $ds = dr$ et θ constant dans l'équation (10), ce qui donne

$$\frac{dr^2}{d\theta^2} = \mu^2(2\,lr\cos\theta - r^2),$$

d'où, par la différentiation par rapport à t,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \mu^2(l\cos\theta - r).$$

équation linéaire dont l'intégrale est, en remarquant que $r = 0$, $\frac{dr}{dt} = 0$, pour $t = 0$,

$$(12) \qquad r = l\cos\theta(1 - \cos\mu t),$$

d'où, pour la durée du parcours de la corde Om, qui doit être la même que celle qui est donnée par la formule (11),

$$(13) \qquad t = \frac{1}{\mu}\operatorname{arc\,cos}\left(1 - \frac{r}{l\cos\theta}\right).$$

En égalant entre elles les valeurs (12) et (13), on obtient

$$\operatorname{arc\,cos}\left(1 - \frac{r}{l\cos\theta}\right) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}{2\,lr\cos\theta - r^2}}\,d\theta\,;$$

d'où, en différentiant par rapport à θ,

$$-r\sin\theta - \cos\theta\frac{dr}{d\theta} = \cos\theta\sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}},$$

et, après avoir élevé au carré,

$$r\frac{d\theta}{dt} = \operatorname{tang}2\theta,$$

équation différentielle de deux systèmes de lemniscates ayant leur centre en O et dont les axes font un angle de 45° avec la droite OA.

4. *Démonstration géométrique du théorème précédent* [1]. — Soient B la projection de A sur la direction de la droite Om, M l'une des intersections de la perpendiculaire élevée en m avec la circonférence décrite du point B comme centre, et dont le rayon est égal à BO.

En supposant θ constant, le point m, en parcourant la droite OB avec une vitesse initiale nulle, obéit à l'accélération $\mu^2 \times m\mathrm{B}$ dirigée de m vers B; d'où il suit que m sera constamment la projection de M sur OB, en supposant que le rayon Bm soit animé autour de son centre de la vitesse angulaire μ. On a ainsi

$$m\mathrm{B} = \mathrm{MB} \cos \mu t,$$

ou

$$l \cos\theta - r = l \cos\theta \cos \mu t,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (12).

En considérant maintenant t comme constant et θ comme variable, on voit que cette équation représente un cercle passant par le point O, dont le centre C est situé sur Ox, et dont le rayon est

$$\mathrm{OC} = \frac{l}{2}(1 - \cos \mu t).$$

Soient maintenant m' un point de la courbe infiniment voisin de m, n le point de la circonférence ci-dessus déterminé par la droite Om.

Le mobile met le même temps pour parcourir les cordes Om, On que s'il décrivait l'arc Om; le temps employé pour aller de O en m' doit donc être le même, que le mobile reste sur la courbe ou sur la corde, de

---

[1] Cette démonstration, dont je n'ai eu l'idée qu'au dernier moment, pourrait, peut-être, être simplifiée dans quelques détails.

sorte que l'on doit avoir

$$mm' = m'n,$$

d'où

$$\widehat{mm'n} = 180^\circ - 2\,\widehat{mnm'} = 180^\circ - 2(90^\circ - 2\theta) = 2\theta,$$

ce qui caractérise les lemniscates auxquelles nous sommes arrivé au numéro précédent.