A. MANNHEIM

Premiers éléments de la géométrie descriptive

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 385-400

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__385_0>

PREMIERS ÉLÉMENTS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE (1);

PAR M. A. MANNHEIM.

Je vais exposer d'une façon très sommaire les premiers éléments de la Géométrie descriptive, afin de faire connaître les changements que je propose dans le système d'enseignement depuis longtemps en usage.

Ces modifications, je l'espère, feront disparaître certaines difficultés qui arrêtent les commençants.

Elles permettront aussi de mieux préparer les élèves aux applications. Actuellement, en effet, pour résoudre les problèmes élémentaires, on emploie des solutions qui conduisent à des tracés simples, mais qui ne sont simples que grâce à la préparation des données.

Ces tracés d'ailleurs ne servent plus, lorsqu'on arrive aux applications. Il me paraît donc important, dès le début, de n'employer que les *solutions mêmes* qu'on retrouvera plus tard.

Lignes droites et plans en projections orthogonales.

Notions préliminaires. — La projection d'un point sur un plan est le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan. Par rapport à ce plan, qu'on appelle *plan de projection,* cette perpendiculaire est appelée *projetante. Tous les points d'une projetante ont la même projection,* et inversement *un point du plan de projection correspond à une infinité de points de l'espace.*

La projection d'un point ne suffit donc pas pour définir

(1) Je rappelle que la publication de mon *Cours de Géométrie descriptive* remonte au mois de novembre 1881. (CH. B.)

la position de ce point dans l'espace. Si l'on veut fixer la position d'un point par rapport à un plan horizontal de projection (que nous supposerons toujours au-dessous du point) on doit non seulement donner la projection de ce point, mais aussi sa hauteur au-dessus du plan de projection. Si cette hauteur est mesurée au moyen d'une échelle, elle est exprimée par un nombre qu'on appelle *cote*. Dans le cas où nous nous plaçons, c'est-à-dire lorsque le point est au-dessus du plan, cette cote porte le nom *d'altitude*.

La méthode de représentation des figures, dans laquelle les points sont représentés par leurs projections horizontales près desquelles on inscrit l'altitude, est désignée sous le nom de *méthode des projections cotées*.

La projection d'une ligne droite D sur un plan est le lieu des projections des points de D : c'est donc une ligne droite. Les projetantes des points de la droite D sont dans un même plan qu'on nomme *plan projetant* de la droite D. Toutes les droites de ce plan projetant, excepté les projetantes, ont pour projection une seule et même droite, qui représente aussi la projection du plan projetant; et inversement, une droite du plan de projection est la projection d'une infinité de droites de l'espace.

Pour fixer la position d'une droite, par rapport à un plan horizontal de projection, on peut donner les projections cotées de deux de ses points. C'est ainsi qu'on opère dans la méthode des projections cotées.

La projection d'une figure s'obtient au moyen des projections de ses différents points convenablement reliés par des lignes.

Les projections d'une figure sur des plans parallèles entre eux sont des figures que l'on peut faire coïncider en même temps que l'on amène en coïncidence les plans de projection qui les contiennent. Cette propriété est presque évidente ; nous l'énoncerons ainsi :

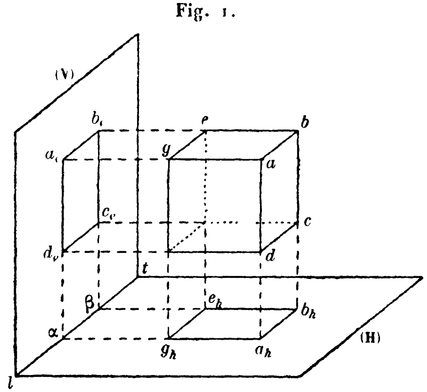
La projection d'une figure sur un plan reste toujours la même à quelque distance qu'on transporte ce plan parallèlement à lui-même.

REPRÉSENTATION D'UN CORPS EN PROJECTIONS ORTHOGONALES.

Nous venons de voir qu'une seule projection ne suffit pas pour la représentation d'une figure et qu'il faut se donner en outre les hauteurs des différents points de cette figure au-dessus d'un même plan. Au lieu d'indiquer ces hauteurs au moyen de nombres indiquant des altitudes, on peut les donner graphiquement. C'est ainsi qu'on opère dans la *méthode des projections orthogonales,* dont nous allons maintenant parler.

Cherchons à représenter un cube placé de façon qu'une face soit horizontale. Prenons (*fig.* 1) un plan de pro-

Fig. 1.



jection horizontale (H) au-dessous du cube et un autre plan de projection (V) parallèle à l'une des faces verticales du cube.

Supposons que ces deux plans de projection, qui forment un angle dièdre droit, soient limités à leur droite d'intersection lt, droite qu'on appelle *ligne de terre*. Le cube est dans l'intérieur de ce dièdre droit.

La projection du cube sur le plan horizontal (H) est le carré $a_h\,b_h\,e_h\,g_h$ ([1]), qu'on appelle la *projection horizontale* du cube.

Projetons le cube sur le plan de projection verticale (V), nous avons encore un carré : $a_v b_v c_v d_v$.

Le sommet a du cube a pour projection sur le plan horizontal (H) le point a_h et pour projection sur le plan vertical (V) le point a_v. On désigne un point de l'espace soit par une seule lettre sans indice, soit par ses deux projections : ainsi, lorsque l'on dit le point (a_h, a_v), cela signifie le point dont les projections sont a_h et a_v.

La distance $a_v\alpha$ du point a_v à la ligne de terre est égale à la hauteur du point a au-dessus du plan (H). De même pour les autres sommets du cube dont les hauteurs au-dessus du plan (H) peuvent être mesurées par les distances, à la ligne de terre lt, des projections verticales de ces sommets. La projection verticale du cube donne donc graphiquement les hauteurs des différents sommets de ce corps.

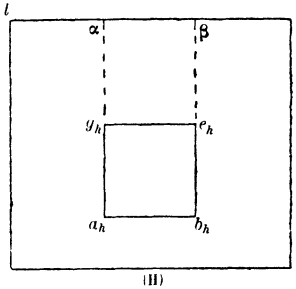
Les deux projections du cube peuvent être tracées sur deux feuilles de dessin séparées.

On voit (*fig.* 2) la projection horizontale a_h, b_h, e_h, g_h du cube sur le plan (H), et d'autre part (*fig.* 2') la projection verticale a_v, b_v, c_v, d_v du cube sur le plan (V). On conçoit qu'on puisse fixer les positions des sommets du cube au-dessus du plan (H) en se servant des distances $a_v\alpha$, $b_v\beta$, $d_v\alpha$, $c_v\beta$, qui marquent graphiquement sur la projection verticale (V) les hauteurs des sommets du cube au-dessus du plan (H).

([1]) L'indice h est employé pour la projection horizontale et l'indice v pour la projection verticale.

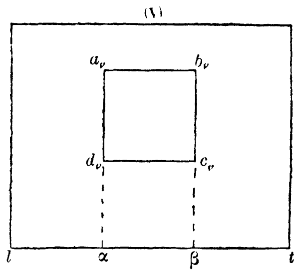
Pour rendre plus faciles les tracés qu'on peut avoir à faire au moyen des deux projections du corps représenté, on ne sépare pas ces deux projections : on les réunit sur une même feuille de dessin. Pour cela, il suffit de suppo-

Fig. 2.



ser qu'on ait ouvert le dièdre droit de la *fig.* 1 en faisant tourner les faces de ce dièdre autour de lt jusqu'à ce qu'elles soient dans le prolongement l'une de l'autre. On

Fig. 2′



arrive ainsi à la *fig.* 3, réunion des *fig.* 2 et 2′ : c'est *l'épure* à l'aide de laquelle le cube est représenté.

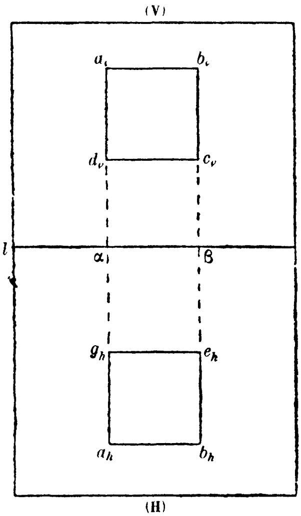
Le plan des projetantes aa_v, aa_h étant perpendiculaire à chacun des plans de projection est perpendiculaire à lt [1]. Les droites $a_v\alpha$ et $a_h\alpha$ suivant lesquelles il

(1) Nous n'adoptons pas l'expression de *plan de profil* pour désigner un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

rencontre les plans de projection sont alors perpendiculaires à lt et, lorsque les plans (H) et (V) sont dans le prolongement l'un de l'autre, il en est de même des droites $a_v\alpha$, $a_h\alpha$. On voit ainsi que *les deux projections* a_v, a_h *d'un point a sont sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.*

On doit remarquer qu'un plan perpendiculaire aux

Fig. 3.



deux plans de projection est représenté sur chacun de ces plans par une droite perpendiculaire à la ligne de terre et qu'un plan parallèle à l'un des plans de projection se projette sur l'autre suivant une parallèle à la ligne de terre.

On appelle *plan de front* un plan parallèle au plan vertical de projection.

Nous n'avons parlé que des hauteurs des points au-dessus du plan (H); mais, pour fixer la position du cube, on peut aussi employer le plan (V) et se servir des distances des sommets du cube à ce plan.

Ces distances ou *éloignements* sont donnés graphiquement sur le plan horizontal de projection. On peut donc dire : *pour restituer un corps dans l'espace, on peut employer l'un ou l'autre des plans de projection.*

Si, pour réunir les deux feuilles de dessin sur lesquelles se trouvent respectivement les projections du corps, on suppose que le dièdre formé par les plans de projection ait été ouvert de façon que le plan vertical soit placé dans le prolongement du plan horizontal de projection supposé fixe, on a en définitive l'épure faite sur une feuille de dessin horizontale. Dans cette hypothèse, on restitue le corps dans l'espace en élevant au-dessus de la feuille de dessin et à des hauteurs convenables les points marqués par leurs projections horizontales.

Si au contraire, pour obtenir les deux projections sur une même feuille de dessin, on suppose que c'est le plan horizontal de projection qui a tourné, l'épure est alors tracée sur une feuille verticale. On restitue alors le corps dans l'espace en éloignant du plan vertical de projection à des distances convenables les points marqués par leurs projections verticales.

Jusqu'à présent, sauf en quelques points, je n'ai fait que reproduire, en les modifiant un peu, les explications que l'on donne aux élèves qui commencent l'étude de la Géométrie descriptive.

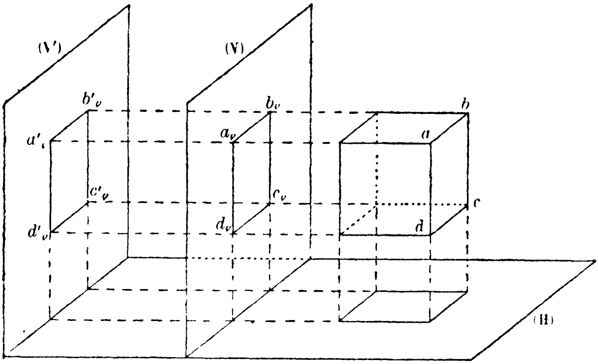
Maintenant je vais m'écarter davantage de la route ordinairement suivie.

Éloignons le plan (V) parallèlement à lui-même jusqu'à ce qu'il vienne prendre la position (V') (*fig.* 4).

La projection verticale du cube sur ce nouveau plan vertical est un carré $a'_v b'_v c'_v d'_v$ égal au carré $a_v b_v c_v d_v$, comme nous l'avons déjà fait remarquer.

Après avoir ouvert le dièdre droit (H), (V′) de manière à obtenir sur une même feuille horizontale les dessins des deux projections, nous avons une épure qui ne diffère

Fig. 4.



de la première, obtenue au moyen du dièdre droit (H), (V), que par la distance plus grande qui sépare les deux projections du cube.

Au lieu de modifier la position de (V), nous pouvons placer le plan (H) à une certaine distance au-dessous de la première position qu'il occupait.

Nous arrivons encore à une épure sur laquelle il y a toujours les deux mêmes carrés, projections du cube; seulement ces deux carrés sont plus ou moins éloignés l'un de l'autre.

Enfin nous avons encore le même résultat si nous éloignons à la fois les deux plans de projection.

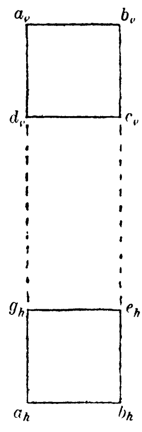
Nous voyons que, *quelles que soient les situations des plans de projection, pourvu que leurs directions ne changent pas, on est toujours amené à des épures qui ne diffèrent entre elles que par l'éloignement qui sépare les deux projections.*

Nous disons alors que *l'épure est toujours la même.*

car l'épure proprement dite ne se compose réellement que des deux parties du dessin relatives à la projection verticale et à la projection horizontale, indépendamment de la distance qui sépare ces projections. Puisque l'épure reste la même lorsqu'on éloigne les plans de projection, nous ne fixons pas la situation de ces plans. Nous la laissons indéterminée, mais nous éloignerons toujours les plans de projection, pour qu'il n'y ait pas de points derrière le plan vertical ni de points au-dessous du plan horizontal. Afin de bien marquer cette indétermination de la position des plans de projection, *nous ne tracerons pas de ligne de terre.*

L'épure à l'aide de laquelle le cube est représenté se

Fig. 5.



réduit alors à la *fig.* 5 (¹). Nous avons sur cette épure

(¹) Pour préciser, on devrait mettre deux lettres avec indices à chacun des sommets des carrés, puisque ces points sont chacun les projections de deux sommets.

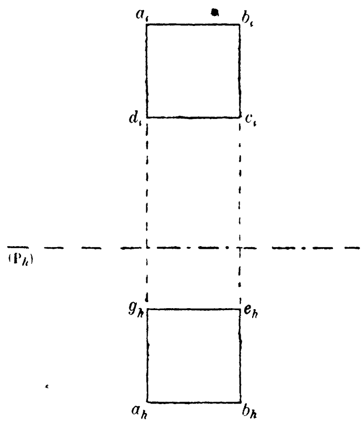
Dans la pratique, on ne met pas de lettres et l'on choisit les projections verticales, de façon qu'elles fassent images et qu'elles soient d'une lecture facile.

les deux carrés, projections du cube, et la direction des droites, telles que $a_h a_v$, qui réunit les deux projections d'un même point a. Nous donnons à cette direction le nom de *direction des projetantes*.

La droite $a_h a_v$ considérée comme appartenant à la projection horizontale donne, en effet, la direction des projetantes perpendiculaires au plan vertical et la droite $a_v a_h$, considérée comme appartenant à la projection verticale, donne en même temps la direction des projetantes perpendiculaires au plan horizontal. D'après cela et ce que nous avons déjà dit, on voit qu'*un plan parallèle à l'un des plans de projection est représenté sur l'autre par une droite perpendiculaire à la direction des projetantes*.

Au moyen de l'épure de la *fig.* 5, il est facile de se

Fig. 6.



représenter le cube de l'espace. Pour cela prenons (*fig.* 6) une droite (P_h) tracée sur la projection horizontale perpendiculairement à la direction des projetantes et qui représente un plan de front. La feuille de l'épure étant supposée placée verticalement, on opère alors en faisant usage de ce plan comme nous l'avons expliqué précédemment, en employant le plan vertical de projection.

Il me paraît utile de familiariser les élèves surtout avec l'emploi de la projection verticale pour restituer une figure de l'espace. C'est, en effet, la projection verticale qui montre le mieux l'apparence habituelle des objets. Ainsi, la projection verticale de la façade de l'Opéra montre bien ce monument, tandis que la projection horizontale ne fait pas image.

En disposant les plans de projections de façon que l'objet à représenter soit toujours au-dessus du plan horizontal et en avant du plan vertical de projection, nous supprimons les difficultés que les élèves rencontrent pour la ponctuation des lignes supposées cachées par les plans de projection.

D'après ce que je viens d'expliquer, on voit que, si la feuille de dessin est assez grande, les projections d'un même corps sont absolument séparées; sinon il peut y avoir une région du papier renfermant à la fois une partie de la projection horizontale et une partie de la projection verticale; mais cela ne modifie en rien *ces projections, qui doivent toujours être considérées comme distinctes l'une de l'autre.*

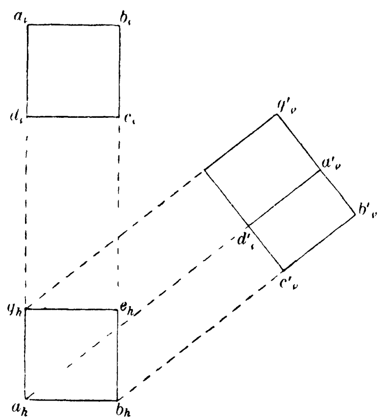
Un corps n'a qu'une projection horizontale, mais il a une infinité de projections verticales. Lorsque l'on a les deux projections d'un corps, il est facile d'avoir une nouvelle projection verticale.

Prenons toujours comme exemple un cube donné (*fig.* 7) par ses deux projections disposées comme nous l'avons vu *fig.* 5.

Par le point a_h traçons la droite $a_h a'_v$ donnant la nouvelle direction des projetantes. Prenons le point a'_v comme nouvelle projection verticale du sommet a de l'espace. La nouvelle projection du sommet d est, en d'_v, sur cette même droite $a_h a'_v$, à une distance du point a'_v égale au segment $a_v d_v$ et portée dans le sens qu'on adopte comme étant celui qu'il faut suivre pour se rapprocher du plan horizontal de projection.

La face supérieure du cube étant horizontale se projette

Fig. 7.



verticalement suivant la droite $g'_v b'_v$ menée par le point a'_v perpendiculairement à la direction des projetantes. De même pour la face inférieure. Il suffit, pour achever de déterminer la projection verticale du cube, de prendre les intersections de ces droites avec les parallèles à la direction des projetantes menées par les sommets du carré $a_h b_h e_h g_h$.

Le point a'_v a été pris arbitrairement sur la parallèle à la nouvelle direction des projetantes menée par le point a_h. Il faut pourtant choisir ce point de façon que la nouvelle projection verticale ne vienne pas se superposer sur la projection horizontale.

Telle est, en quelques mots, la modification principale que je propose. La suppression de la ligne de terre ne complique pas l'exposition des solutions des problèmes élémentaires, comme nous allons le voir. Mais, auparavant, je dois faire remarquer que, en proposant cette suppression, je ne fais qu'introduire dans les éléments un procédé en usage dans les applications.

Lorsque, par exemple, un charpentier veut établir le limon d'un escalier en bois, il représente la projection de ce limon sur une aire horizontale; puis, pour étudier l'assemblage qui relie deux parties de ce limon, il emploie une projection verticale qu'il trace aussi sur le sol. Il y a ainsi une projection verticale pour chacun des assemblages et *toutes ces projections verticales sont dessinées sans tenir compte des hauteurs auxquelles se trouvent les assemblages représentés.*

Si le charpentier avait cherché les projections verticales des assemblages en supposant les plans verticaux rabattus après avoir tourné autour de leurs traces sur le sol, il aurait obtenu des projections de plus en plus éloignées de la projection horizontale à mesure qu'il se serait occupé des assemblages plus élevés. Cette pratique aurait nécessité une très grande aire pour l'épure et aurait donné lieu à de longues lignes à tracer.

Ainsi, et je le répète encore, en proposant de supprimer la ligne de terre sur les épures, je demande simplement qu'on emploie dans les éléments le procédé qui est en usage dans les applications, procédé qui a, en outre, l'avantage de faire disparaître les difficultés concernant la ponctuation des lignes supposées cachées par les plans de projection.

PROBLÈMES DESCRIPTIFS.

L'illustre Poncelet a partagé les propriétés de l'étendue en deux classes : les propriétés descriptives et les propriétés métriques, afin de distinguer celles dans lesquelles interviennent les grandeurs linéaires ou angulaires.

La propriété relative au carré de l'hypoténuse est une propriété *métrique*.

Lorsque deux triangles ont leurs sommets sur trois droites convergentes en un même point, leurs côtés correspondants se coupent en trois points en ligne droite. Voilà une propriété *descriptive*.

Nous emploierons encore les épithètes de *descriptifs* et de *métriques* pour distinguer deux genres de problèmes.

Les problèmes métriques sont ceux dans lesquels interviennent par leurs mesures, soit dans la solution, soit dans le résultat, les grandeurs linéaires ou angulaires. *Déterminer l'angle d'une droite et d'un plan* est un *problème métrique*.

Construire le point où une droite rencontre un plan est un *problème descriptif*.

Nous allons traiter certains problèmes descriptifs; mais auparavant disons quelques mots de la représentation d'une droite et de la représentation d'un plan.

Nous n'avons rien à ajouter à ce qui a déjà été dit relativement aux projections d'un point à propos de la représentation d'un cube. Dans le système que je propose, il n'y a plus à considérer les positions diverses d'un point par rapport aux plans de projection, ce qui était une première difficulté pour les élèves.

Un point doit toujours être supposé au-dessus du plan horizontal de projection et en avant du plan vertical de projection.

On appelle une *horizontale* une droite parallèle au plan horizontal de projection, et *droite de front* une droite qui est parallèle au plan vertical de projection.

Une droite est représentée par ses deux projections.

Elle est déterminée lorsqu'on donne les projections de deux de ses points.

Un plan peut être donné de plusieurs manières, soit au moyen de deux droites qui se coupent ou d'une droite et d'un point, etc.

On distingue sur un plan ses *horizontales* et ses *droites de front*.

On a appelé *traces* d'un plan les droites suivant lesquelles ce plan rencontre les plans de projection.

Nous n'aurons plus à chercher de traces de plan, puisque nous laissons les plans de projection dans une position indéterminée. Au lieu de construire des traces nous chercherons les horizontales et les droites de front des plans.

Comme on le fait d'habitude, nous emploierons indifféremment les mots *intersection* et *trace*. Ainsi nous dirons indifféremment la trace d'une droite sur un plan ou l'intersection d'une droite et d'un plan.

On ne doit pas oublier ce que nous avons déjà dit et que je répète. Pour simplifier le langage, en Géométrie descriptive, on désigne les points de l'espace en les indiquant soit par une lettre sans indice, soit par leurs projections. Ainsi, lorsque l'on dit le point (a_h, a_v), il s'agit du point de l'espace dont les projections sont a_h et a_v.

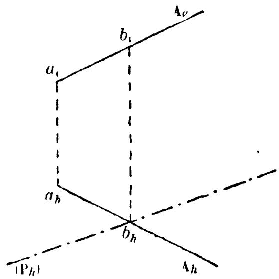
Si l'on demande, comme nous allons le faire, de *déterminer la trace d'une droite sur un plan vertical,* il faut comprendre que ce dernier membre de phrase souligné équivaut à celui-ci : *Déterminer les projections de la trace d'une droite sur un plan vertical.*

Comme la solution de ce problème est la même, qu'il s'agisse de l'un ou l'autre des plans de projection, nous l'énonçons ainsi :

Déterminer la trace d'une droite sur un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection.

Le plan étant supposé perpendiculaire au plan horizontal de projection a pour projection horizontale (*fig.* 8) la droite (P_h). Pour indiquer que cette droite représente un plan, nous la traçons avec des points et des traits et

Fig. 8.



nous employons la notation (P_h), en ayant soin de mettre une parenthèse.

La droite A de l'espace est représentée par ses deux projections A_h, A_v. Nous avons marqué sur la figure les deux projections a_h, a_v d'un point de cette droite afin de donner la direction des projetantes.

Le plan qui projette horizontalement la droite A et le plan donné sont deux plans verticaux qui se coupent suivant une verticale projetée horizontalement au point b_h et verticalement suivant la parallèle à la direction des projetantes issues de b_h. Le point b_v, où cette droite rencontre A_v, est la projection verticale du point demandé. Les projections de la trace cherchée sont donc b_h et b_v.

On détermine de la même manière la trace d'une droite sur un plan perpendiculaire au plan vertical de projection. (*A suivre.*)