Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 368-382

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__368_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1367

(voir 2e série, t. XX, p. 381),

PAR M. MORET-BLANC.

1° *Si une équation $f(x) = 0$ est ordonnée et de la forme*

$$f(x) = \varphi(x) + \alpha x^p - \beta x^{p-1} + \gamma x^{p-2} + \psi x = 0,$$

φ et ψ n'ayant que des permances et α, β, γ étant des nombres positif, tels que $\beta^2 = \alpha\gamma$, l'équation n'a pas de racines réelles positives.

2° *Si quatre coefficients consécutifs d'une équation* *sont* $b+c$, b, c, $b-c$, *de sorte que*

$$f(x) = \ldots (b+c)x^{p+1} + bx^p + cx^{p-1} \\ + (b-c)x^{p-2} + \ldots = 0,$$

l'équation a des racines imaginaires.

3° *Si quatre coefficients consécutifs sont* a, b, a, b, *de telle sorte que*

$$f(x) = \ldots ax^{p+1} + bx^p + ax^{p-1} + bx^{p-2} + \ldots = 0,$$

l'équation a au moins deux racines imaginaires.

On propose de généraliser cette proposition et de faire voir que si trois coefficients consécutifs a, b, c *se reproduisent trois fois périodiquement, de telle sorte que l'on trouve dans l'équation* a, b, c; a, b, c; a, b, c *comme étant neuf coefficients consécutifs, l'équation a au moins quatre racines imaginaires, et ainsi de suite.*

En supposant que les coefficients a_1, a_2, $\ldots$, a_p *se reproduisent* p *fois périodiquement, dire combien l'équation a, au moins, de racines imaginaires.*

On distinguera les cas de p *pair et de* p *impair.*

(G. DE LONGCHAMP.)

1° $\alpha x^p - \beta x^{p-1} + \gamma x^{p-2} = x^{p-2}(\alpha x^2 - \beta x + \gamma)$.

L'équation $\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0$ ayant ses racines imaginaires le trinôme $\alpha x^p - \beta x^{p-1} + \gamma x^{p-2}$ est positif pour toute valeur positive de x; il en est de même de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$, qui n'ont que des termes positifs; donc, pour toute valeur positive de x, le premier membre de l'équation $f(x) = 0$, étant la somme de trois quantités positives, ne peut être nul : donc, etc.

Note. — On suppose que tous les coefficients de $\psi(x)$ sont positifs et qu'il y a un terme indépendant de x, sans quoi l'équation aurait une racine positive ou nulle.

2° Je m'appuierai sur ce lemme bien connu : *Si une* *équation ordonnée présente une lacune de p termes consécutifs, l'équation a au moins p ou p — 1 racines imaginaires, suivant que p est pair ou impair.*

Cela posé, l'équation $f(x) = 0$ admet les mêmes racines imaginaires que l'équation

$$(x^2 + x - 1)f(x) = 0;$$

or celle-ci présente une lacune de deux termes consécutifs, les termes en x^{p+1} et x^p; donc cette équation, et par suite aussi $f(x) = 0$, a au moins deux racines imaginaires.

3° L'équation $f(x) = 0$ a les mêmes racines imaginaires que l'équation $(x^2 - 1)f(x) = 0$, qui présente une lacune de deux termes consécutifs; donc elle a au moins deux racines imaginaires.

Généralisation. — Si a, b, c; a, b, c; a, b, c sont neuf coefficients consécutifs de l'équation $f(x) = 0$, l'équation

$$(x^3 - 1)f(x) = 0,$$

ayant une lacune de six termes consécutifs, a au moins six racines imaginaires, et comme $x^3 - 1 = 0$ en a deux, l'équation $f(x) = 0$ a au moins quatre racines imaginaires.

Si les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_p$ se reproduisent p fois périodiquement, l'équation

$$(x^p - 1)f(x) = 0$$

aura une lacune de $(p - 1)p$ termes consécutifs, et par suite, au moins, $p(p - 1)$ racines imaginaires. L'équation

$$x^p - 1 = 0$$

a $p - 2$ ou $p - 1$ racines imaginaires, suivant que p est pair ou impair : donc le nombre minimum des racines imaginaires de l'équation $f(x) = 0$ est

$$(p-1)p - (p-2) = (p-1)^2 + 1$$

si p est pair, et

$$(p-1)p - (p-1) = (p-1)^2$$

si p est impair.

Question 1368

(voir 2ᵉ série, t. XX, p. 382);

PAR M. FERDINANDO PISANI.

Soient $OA = OB = OC$ *trois longueurs égales portées sur trois axes rectangulaires;* A_1, B_1, C_1 *les projections orthogonales des points* A, B, C, *sur un plan quelconque passant par le point* O.

Si l'on pose

$$OA_1 = a, \quad OB_1 = b, \quad OC_1 = c,$$

$$\widehat{B_1OC_1} = \alpha, \quad \widehat{C_1OA_1} = \beta, \quad \widehat{A_1OB_1} = \gamma,$$

on aura

$$\frac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{b^2}{\sin\beta\cos\beta} = \frac{c^2}{\sin\gamma\cos\gamma} = l^2,$$

$$AA_1 = \frac{a}{\cos\alpha}\sqrt{-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma},$$

$$BB_1 = \frac{b}{\cos\beta}\sqrt{-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

$$CC_1 = \frac{c}{\cos\gamma}\sqrt{-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

et

$$OA = l\sqrt{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\ (^1).$$

Discuter ces formules. (GENTY.)

(¹) Il est, je présume, implicitement supposé que le plan mené par le point O laisse d'un même côté les trois droites OA, OB, OC. Car si

I. On a

$$\begin{aligned}OA^2+OB^2=AB^2 &= A_1B_1^2+(AA_1-BB_1)^2\\ &= OA_1^2+OB_1^2-2OA_1OB_1\cos A_1OB_1\\ &\quad + AA_1^2+BB_1^2-2AA_1BB_1\\ &= OA^2+OB^2-2OA_1OB_1\cos A_1OB_1-2AA_1BB_1,\end{aligned}$$

d'où

$$AA_1.BB_1 = -ab\cos\gamma.$$

Pareillement

$$AA_1.CC_1 = -ac\cos\beta,\quad BB_1.CC_1 = -bc\cos\alpha,$$

et, par suite,

$$AA_1^2.BB_1.CC_1 = a^2bc\cos\beta\cos\gamma,$$

$$AA_1^2 = -\frac{a^2\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha},$$

---

l'une de ces droites, OA par exemple, était située d'un côté de ce plan et OB, OC de l'autre côté, les angles A_1OB_1, A_1OC_1 seraient aigus, et B_1OC_1 obtus; les rapports $\frac{b^2}{\sin\beta\cos\beta}$, $\frac{c^2}{\sin\gamma\cos\gamma}$ seraient positifs, et $\frac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$ négatif, et par conséquent on n'aurait pas

$$\frac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{b^2}{\sin\beta\cos\beta} = \frac{c^2}{\sin\gamma\cos\gamma}.$$

Lorsque le plan passant par le point O laisse d'un même côté les trois droites OA, OB, OC, les angles α, β, γ sont obtus, et les rapports

$$\frac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha},\quad \frac{b^2}{\sin\beta\cos\beta},\quad \frac{c^2}{\sin\gamma\cos\gamma}$$

sont, tous trois, négatifs. Dans ce cas, les égalités

$$\frac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = l^2$$

et

$$OA = l\sqrt{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

donnent à l, et par suite à OA, une valeur imaginaire. En posant

$$\frac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = -l^2,$$

on trouve, en réalité,

$$OA = l\sqrt{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$

(G.)

ou bien

$$AA_1 = \frac{a}{\cos\alpha}\sqrt{-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

On aura de même

$$BB_1 = \frac{b}{\cos\beta}\sqrt{-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

et

$$CC_1 = \frac{c}{\cos\gamma}\sqrt{-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

II. On a

$$OA^2 = OA_1^2 + AA_1^2 = a^2 - \frac{a^2\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}$$
$$= \frac{a^2}{\cos\alpha}(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma).$$

Mais

$$\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ,$$

donc

$$\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma = -\sin\beta\sin\gamma$$

et

$$OA^2 = -\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha} = -\frac{a^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

De même

$$OB^2 = -\frac{b^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\beta\cos\beta}, \quad OC^2 = -\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\gamma\cos\gamma},$$

et, parce que $OA = OB = OC$, on a

$$\frac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{b^2}{\sin\beta\cos\beta} = \frac{c^2}{\sin\gamma\cos\gamma}.$$

L'égalité $OA^2 = -\dfrac{a^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\cos\alpha}$ donne

$$OA^2 = \left(-\frac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

ou, en posant $-\dfrac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = l^2$,

$$OA = l\sqrt{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$

Note. La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1375

PAR M. CHOUDADOV, à Stavropol (Caucase).

D'un point S *extérieur à un cercle* O *on mène à ce cercle la tangente* SA, *et au centre* O *la sécante* SO *qui coupe la circonférence en* B *et* C. *Le point de contact* A *de la tangente sépare la demi-cironférence* ABC *en deux arcs* AMB, ANC *qui forment les troisièmes côtés de deux triangles mixtilignes* SAMB *et* SANC. *Si l'on fait tourner la figure autour de* SO, *ces deux triangles mixtilignes engendrent des volumes qui sont respectivement équivalents aux deux cônes ayant pour rayons de base les deux segments* SB *et* SC *de la sécante, et pour hauteur commune la projection* OD *du rayon de contact* OA *sur cette sécante; c'est-à-dire que*

$$\text{vol. SAMB} = \frac{1}{3}\pi\overline{SB}^2\,OD,$$

et

$$\text{vol. SANC} = \frac{1}{3}\pi\overline{SC}^2\,OD. \qquad \text{(DOSTOR.)}$$

Soit R le rayon du cercle O.

I. Le volume engendré par le triangle mixtiligne SAMB est la différence des volumes du cône décrit par le triangle SAD et du segment sphérique à une base, engendre par BMAD.

Le volume du cône

$$SAD = \frac{\pi}{3}\overline{AD}^2\,SD,$$

ou, parce que

$$AD^2 = SD.OD,$$

on a

$$\text{vol. cône SAD} = \frac{\pi}{3}SD^2\,OD = \frac{\pi}{3}OD(SB^2 + 2SB.BD + BD^2)$$

ou

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\text{vol. cône SAD} = \frac{1}{3}\pi\overline{SB}^2 OD \\ &\qquad + \frac{1}{3}\pi OD(2.SB.BD + BD^2). \end{aligned}\right.$$

D'autre part, le segment sphérique

$$BMAD = \pi.BD^2\left(R - \frac{1}{3}BD\right) = \frac{\pi}{3}BD^2(2R + OD).$$

Mais les triangles rectangles BAC, SAO donnent

$$CD.BD = SD.OD$$

ou

$$(R + OD)BD = (SB + BD)OD; \quad R.BD = SB.OD.$$

En remplaçant $R.BD$ par $SB.OD$ dans l'expression $\frac{\pi}{3}BD^2(2R + OD)$ du segment sphérique, il vient

$$(2)\quad \text{segment sphérique } BMAD = \frac{1}{3}\pi OD(2SB.BD + DB^2)$$

et des formules (1) et (2) résulte immédiatement

$$\text{vol. cône SAD} - \text{segment sphérique BMAD}$$

$$\text{ou vol. SAMB} = \frac{1}{2}\pi SB^2 OD.$$

II. De même,

$$\text{vol. SANC} = \text{vol. SAD} + \text{vol. DANC},$$

$$\text{vol. SAD} = \frac{\pi}{3}SD^2 OD.$$

$$\text{vol.DANC} = \pi.CD^2\left(R - \frac{1}{3}CD\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}CD^2(3R - CD) = \frac{\pi}{3}CD^2(R + BD),$$

ou, parce que $R + BD = OD + 2BD$,

$$\text{vol. DANC} = \frac{\pi}{3}CD^2(OD + 2BD).$$

Mais CD.BD = SD.OD, donc

$$\text{vol. DANC} = \frac{\pi}{3}\text{OD}(\text{CD}^2 + 2\,\text{SD.CD}).$$

Il s'ensuit

$$\text{vol. SAD} + \text{vol. DANC} = \frac{\pi}{3}\text{OD}(\text{SD}^2 + \text{CD}^2 + 2\,\text{SD.CD})$$

$$= \frac{\pi}{3}\text{OD}\,(\text{SD} + \text{CD})^2 = \frac{\pi}{3}\text{OD.SC}^2.$$

Par conséquent,

$$\text{vol. SANC} = \frac{\pi}{3}\text{SC}^2\text{OD}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez; Pisani; Goffart; Lucien Meyer; Henri Vieille et A. Leblond, élèves du lycée du Havre.

Question 1377

(voir 2ᵉ série, t. XX, p. 526);

PAR M. FRANÇOIS BORLETTI,

Ingénieur à Milan.

Trouver les valeurs des intégrales

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)}}$$

et

$$\int \frac{3x-1}{x^2-1}\,\frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2-x-2}}.$$

(RÉALIS.)

1. La première de ces deux intégrales peut s'écrire

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,\frac{dx}{\sqrt{(x^2+3x+1)^2-1}},$$

et, en posant $(x_2 + 3x + 1)^2 - 1 = z^2$, elle devient

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc tang}\, z + C;$$

donc

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+1} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)}}$$
$$= \text{arc tang}\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \text{C}.$$

II. La seconde intégrale peut s'écrire

$$\int \frac{3x^2+2x-1}{x^3+x^2-x-1} \frac{dx}{\sqrt{(x^3+x^2-x-1)-1}},$$

et, en posant $x^3+x^2-x-2=z^2$, elle devient

$$2\int \frac{dz}{1+z^2} = 2\,\text{arc tang}\, z + \text{C};$$

donc

$$\int \frac{3x-1}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2-x-2}}$$
$$= 2\,\text{arc tang}\sqrt{x^3+x^2-x-2} + \text{C}.$$

Ces deux intégrales sont des cas particuliers de l'intégrale plus générale

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \frac{dx}{\sqrt{\varphi^m_{(x)}-1}} = \frac{2}{m}\,\text{arc tang}\sqrt{\varphi^m_{(x)}-1} + \text{C},$$

m désignant un nombre quelconque différent de zéro.

Note. — La même question a été résolue par MM. Pisani, Lez, Fauquembergue.

Question 1379

(voir 2e série, t XX, p. 527);

PAR M. FRANÇOIS BORLETTI,

Ingénieur à Milan.

Les trois côtés a, b, c d'un triangle sont exprimés par des nombres entiers en progression arithmétique; et si l'on ajoute successivement 50 *et* 60 *à chacun de ces côtés, le rayon du cercle inscrit augmente respective-*

ment de 17 et de 20 : trouver les valeurs des côtés de ce triangle. (W.-A. Whitworth, M. A.)

Soient r le rayon du cercle inscrit dans le triangle et p le demi-périmètre; on a

$$(1) \qquad r^2 p = (p-a)(p-b)(p-c).$$

En nommant d la raison de la progression arithmétique, les côtés seront

$$a, \quad b = a + d, \quad c = a + 2d,$$

et l'équation (1) devient

$$12 r^2 = (a-d)(a+3d).$$

Si l'on ajoute successivement 50 et 60 à chacun des côtés, le rayon du cercle inscrit augmente respectivement de 17 et de 20; donc

$$12(r+17)^2 = (a-d+50)(a+3d+50),$$
$$12(r+20)^2 = (a-d+60)(a+3d+60),$$

En posant $a - d = y$, $a + 3d = x$, ces équations deviennent

$$(2) \qquad 12 r^2 = xy,$$
$$(3) \qquad 12(r+17)^2 = xy + 50(x+y) + 2500,$$
$$(4) \qquad 12(r+20)^2 = xy + 60(x+y) + 3600,$$

et, en retranchant de chacune des équations (3) et (4) de l'équation (2), membre à membre, on a

$$204 r + 484 = 25(x+y),$$
$$8r + 20 = x + y;$$

d'où

$$x + y = 52 \quad \text{et} \quad r = 4,$$

et par suite

$$xy = 192.$$

Donc, x et y sont les racines de l'équation

$$z^2 - 52.z + 192 = 0;$$

on en déduit

$$x = 48 \quad \text{et} \quad y = 4.$$

Par conséquent,

$$a + 3d = 48$$

et

$$a - d = 4.$$

Ces deux équations donnent

$$a = 15, \quad d = 11;$$

donc les valeurs des côtés du triangle sont 15, 26, 37.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez; Pisani; J. Thomas, maréchal de logis d'artillerie de Marine, à Toulon; Henri Vieille, élève du lycée du Havre.

Question 1380

(voir 2ᵉ série, t. XX, p. 527),

PAR M. A. LEBLOND,
Elève du lycée du Havre.

Si, par les points de contact d'une tangente commune à deux circonférences qui se coupent, et par un de leurs points d'intersection, on fait passer une circonférence, son rayon sera moyen géométrique entre les rayons des deux premiers cercles.

(DOMENICO MONTESANO.)

Soient

O, O′ les centres des circonférences données ([1]);
A, B les points de contact de la tangente commune considérée;
D un des points d'intersection des deux circonférences;

([1]) Le lecteur est prié de faire la figure.

C le centre de la circonférence circonscrite au triangle ABD.

Les angles AOC, DCO′ sont égaux, car ils ont chacun même mesure que l'angle DAB. On a, de même,

$$\widehat{ACO} = \widehat{ABD} = \widehat{CO'D}.$$

Donc, les triangles ACO et CDO′ sont semblables et donnent

$$\frac{AO}{CD} = \frac{AC}{DO'},$$

d'ou

$$AC^2 = AO.DO'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Note. — Solutions analogues de MM. François Borletti, ingénieur à Milan; J. Pisani; Edmond van Aubel; Lacombe, abonné; J. Thomas, maréchal des logis d'Artillerie de marine, à Toulon; Joseph Nadal, élève au lycée de Toulouse; Henri Vielle, du lycée du Havre; J. Boudènes, du lycée d'Avignon; P., du lycée de Toulouse.

La même question a été résolue, au moyen des formules de la Trigonométrie, par M. Lez; par M. Marcolongo.

M. Domenico Montesano en a donné une solution fondée sur la théorie de l'involution.

Question 1386

(voir 3e série, t. I, p. 141),

PAR M. MORET-BLANC.

Soient A, B, C, D *quatre points pris arbitrairement sur un cercle ayant pour centre le point* O. *Considérons l'hyberbole équilatère passant par ces quatre points, et de son centre* ω *abaissons une perpendiculaire* ωP *sur un côté quelconque* AB *du quadrilatère* ABCD; *du centre* O *du cercle, abaissons une perpendiculaire* OQ *sur le côté opposé* CD. *En désignant par* V *l'angle que font les côtés opposés* AB *et* CD, *démontrer la relation*

$$\omega P = OQ \cos V. \qquad \text{(Laguerre.)}$$

Q est le milieu de CD; soient R le milieu de AB et I le milieu de QR.

Prolongeons AB et CD jusqu'à leur rencontre en V, puis menons QS et RS respectivement parallèles à AB et à CD, et tirons les droites OR, ωQ, ωR (¹).

On sait que, si par les milieux de deux cordes d'une hyperbole équilatère on leur mène respectivement des parallèles, le point d'intersection de ces parallèles, les milieux des deux cordes et le centre de l'hyperbole sont sur une même circonférence, théorème qui résulte très simplement de ce que deux diamètres conjugués d'une hyperbole équilatère font avec un des axes des angles complémentaires.

Le quadrilatère ωQSR est donc inscriptible, de même que le quadrilatère OQVR, dont les angles en Q et en R sont droits. Les circonférences circonscrites à ces quadrilatères, qui sont les circonférences circonscrites aux triangles QSR, QVR, sont symétriques par rapport au point I. Il en résulte que l'angle

$$Q\omega R = QOR = 180^\circ - V.$$

Les cordes AB et CD communes au cercle et à l'hyperbole sont également inclinées sur les axes de l'hyperbole : leurs diamètres conjugués ωQ, ωR font donc avec ces cordes, et, par suite, avec leurs perpendiculaires OQ, OR, des angles égaux ; donc

$$\omega QO = \omega RO = V,$$

et le quadrilatère ωQOR est un parallélogramme ; $\omega R = \omega Q$ et ωP est le prolongement de Qω.

On a donc

$$\widehat{R\omega P} = 180^\circ - \widehat{Q\omega R} = V,$$

$$\omega P = \omega R \cos V = OQ \cos V,$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. E. Picardeau, du lycée de Clermont.

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

Question 1397

(voir 3e série, t. I, p. 528);

PAR M. MORET-BLANC.

On donne une conique inscrite dans un triangle ABC; *par les sommets du triangle on mène des droites* AA', BB', CC' *se coupant en un point* O, *et par leur point de rencontre* A', B', C' *avec les côtés opposés, des tangentes à la conique qui coupent les droites* B'C', C'A', A'B' *en des points a, b, c. Démontrer que ces trois points sont en ligne droite.* (E. FAUQUEMBERGUE.)

Soient A_1, B_1, C_1 les intersections des couples de tangentes menées respectivement par B' et C', C' et A', A' et B'; $A'B_1C'A_1B'C_1A'$ peut être considéré comme un hexagone circonscrit à la conique. En vertu du théorème de Brianchon, les droites $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ qui joignent les sommets opposés se rencontrent en un même point; les triangles $A'B'C'$, $A_1B_1C_1$ sont donc homologiques, et les côtés homologues $B'C'$ et B_1C_1, $C'A'$ et C_1A_1, $A'B'$ et A_1B_1 se rencontrent en des points *a*, *b*, *c* situés en ligne droite.

Note. — La même question a été résolue par M. Strekalof, à Saint-Pétersbourg.