# Composition mathématique pour l'admission à l'École polytechnique en 1882. Solution géométrique

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 1 (1882), p. 351-356

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__351_1>

## COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1882. SOLUTION GÉOMÉTRIQUE;

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

*On donne deux cercles se coupant aux points a et b. Une conique quelconque, passant par ces points et* *tangente aux deux cercles, rencontre l'hyperbole équilatère, qui a ces points pour sommets, en deux autres points c et d :*

1° *Démontrer que la droite cd passe par un des centres de similitude des deux cercles donnés ;*

2° *Si l'on considère toutes les coniques qui, passant par a et b, sont tangentes aux deux cercles, démontrer que le lieu de leurs centres se compose de deux circonférences de cercle* E *et* F ;

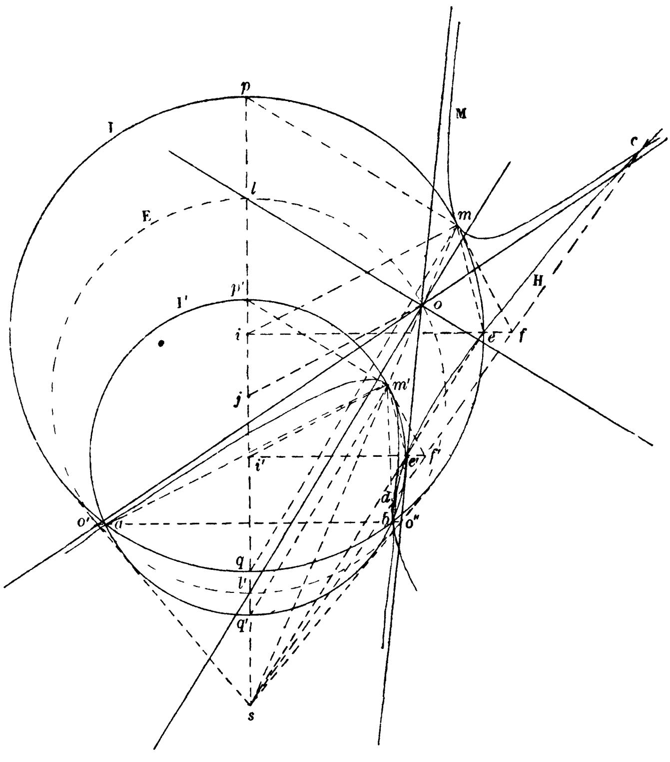
3° *Soit une conique satisfaisant à la question et ayant son centre sur l'une des circonférences* E *ou* F ; *démontrer que les asymptotes de cette conique rencontrent cette circonférence en deux points fixes situés sur l'axe radical des deux cercles donnés.*

Soient I et I′ les circonférences données qui se coupent aux points $a$ et $b$; $s$ le centre de similitude externe de ces circonférences et $s'$ l'autre centre de similitude. Prenons une conique M passant par $a$ et $b$ et tangente à I et I′. Soient $m$, $m'$ les points où elle touche ces circonférences. On sait que la tangente en $m$ à la circonférence I et la corde $ab$ sont également inclinées sur les axes de M. Comme ceci est vrai pour la tangente en $m'$ à I′, il en résulte que les tangentes en $m$ et $m'$ aux circonférences données sont parallèles entre elles. La droite $mm'$ passe alors par le centre de similitude $s$.

Les circonférences I et I′ ayant deux centres de similitude, il y a deux séries de coniques satisfaisant à la question, c'est-à-dire passant par les points $a$ et $b$ et tangentes aux circonférences données. Nous désignerons par $M_s$ les coniques pour lesquelles les cordes de contact, telles que $mm'$, passent par $s$; et par $M_{s'}$ les autres coniques ([1]).

([1]) On voit facilement que les coniques $M_s$ sont des hyperboles et que les coniques $M_{s'}$ sont des ellipses.

L'hyperbole équilatère H, dont les sommets sont $a$ et $b$, coupe I aux extrémités du diamètre de cette circonférence parallèle à $ab$ (¹). De même pour I'. Appelons $e$ et $e'$ les points où l'une des branches de H rencontre I et




I'. Il résulte de la propriété que nous venons de rappeler que *la droite $ee'$ passe par $s$.*

Ceci va nous permettre de démontrer simplement la première partie de la question proposée.

---

(¹) Nous supposons démontrée cette propriété.

Les trois coniques I, M, H ayant une corde commune $ab$ se coupent deux à deux suivant des cordes qui passent par un même point; I et H ont pour corde commune, en dehors de $ab$, la parallèle $ef$ à $ab$. De même I et M pour corde commune la tangente $mf$ à ces courbes.

Le point $f$, où cette tangente rencontre $ef$, appartient alors à la droite $cd$ qui est la corde commune à H et M. De même, en prenant les trois courbes I', M, H, on trouve un point $f'$ de $cd$.

Mais les triangles $mef$, $m'e'f'$ sont semblables et les droites $mm'$, $ee'$ passent par $s$. Il en est alors de même de $ff'$. *La droite $ff'$, c'est-à-dire $cd$, passe donc par $s$.*

2° Appelons $o$ le milieu de $mm'$; ce point est le centre de la conique M. Menons du point $o$ la droite $oj$ parallèlement au rayon $im$ de I.

Le point $j$ est alors le milieu du segment $ii'$ compris entre les centres des circonférences I et I'.

Le point $j$ est, par suite, le même pour toutes les coniques satisfaisant à la question. Le segment $oj$ a pour longueur la demi-somme des longueurs des rayons des circonférences I et I'. Les points tels que $o$ appartiennent donc à une circonférence de cercle E.

S'il s'agit de coniques $M_{s'}$, leurs centres sont sur une circonférence F concentrique à E et dont le rayon est la demi-différence des rayons de I et de I'. On peut donc dire :

*Toutes les coniques qui, passant par a et b, sont tangentes aux deux circonférences* I *et* I', *ont leurs centres sur deux circonférences concentriques* E *et* F. *Les rayons de ces dernières circonférences sont égaux, l'un à la demi-somme, l'autre à la demi-différence des rayons des circonférences* I, I'.

3° Les axes de la conique M sont parallèles aux bissectrices des angles que font entre elles les cordes $m'a$, $m'b$. Ces axes sont alors parallèles aux droites $m'p'$, $m'q'$ qui joignent le point $m'$ aux extrémités du diamètre $p'q'$, perpendiculaire à $ab$.

Ces axes sont aussi parallèles aux droites analogues $mp$, $mq$, et, comme ils passent par $o$, on voit que :

*Les axes de* M *sont les droites $ol$, $ol'$ qui joignent le centre $o$ aux points $l$ et $l'$ qui sont respectivement les milieux des segments $pp'$, $qq'$.*

Si l'on prend des coniques $M_s$, les points $l$ et $l'$ sont fixes. Donc :

*Toutes les coniques* $M_s$ *ont pour axes des droites passant par les mêmes deux points $l$ et $l'$.*

L'angle $lol'$ étant droit, nous retrouvons que :

*Le lieu des centres des coniques* $M_s$ *est une circonférence* E *décrite sur $ll'$ comme diamètre.*

Parmi les positions que peut occuper le centre $o$, il y en a $o'$, $o''$ qui sont respectivement les milieux des segments compris sur les tangentes communes à I et I′ entre les points de contact de ces droites.

La circonférence E coupe donc la droite $ab$ aux points $o'$ et $o''$. On voit aussi qu'elle est tangente en ces points aux tangentes communes à I et I′.

Cherchons les asymptotes de M. Ces droites forment avec la corde commune $ab$ un triangle qu'il s'agit de construire. Dans ce triangle, nous connaissons la médiane qui part du point $o$, puisqu'elle aboutit au point $g$ milieu de $ab$ ; nous connaissons aussi la bissectrice de l'angle en $o$, qui est l'axe $ol'$, puisque les asymptotes de M sont également inclinées sur cet axe.

Cette médiane et cette bissectrice étant connues, on a tout de suite la circonférence circonscrite au triangle. Cette circonférence n'est autre que E. Les asymptotes demandées sont alors les droites $oo'$, $oo''$. On voit qu'elles passent par deux points fixes de l'axe radical $ab$. Ainsi :

*Les asymptotes des coniques* $M_s$ *passent par deux points fixes situés sur l'axe radical des circonférences données.*

Comme ces points fixes appartiennent à E, ainsi que le point de rencontre $o$ des asymptotes, l'angle compris entre ces droites est constant, quelle que soit la conique $M_s$; par suite :

*Les coniques* $M_s$ *sont semblables entre elles.*

Ceci s'étend évidemment aux coniques $M_{s'}$.

On peut encore arriver à ce résultat en remarquant que les axes de M partagent la normale $im$ à cette courbe en segments dont le rapport est constant, quelle que soit la position de $m$ sur I.

Les trois parties de la question proposée étant ainsi démontrées, j'énoncerai en outre les propriétés suivantes :

*Les axes d'une conique* $M_r$ *sont rencontrés par la normale, telle que im, en des points qui appartiennent à deux circonférences concentriques à* I *et qui sont tangentes à* E.

*Les extrémités des diamètres des coniques* $M_{s'}$, *respectivement parallèles aux tangentes telles que mf, appartiennent à une circonférence concentrique à* F.

*Les droites* $oo'$, $oo''$ *interceptent, sur la tangente mf à* I, *un segment, qui est de grandeur constante, quelle que soit la position de m sur* I.