Nouvelles annales de mathématiques

E. Brassinne

Généralisation du théorème de Brianchon et de l'hexagone de Pascal

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 318-319

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__318_1>

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE BRIANCHON ET DE L'HEXAGONE DE PASCAL;

PAR M. E. BRASSINNE.

THÉORÈME I. — *Un polygone de $2n$ côtés est circonscrit à une conique, si $n-1$ diagonales consécutives, joignant chacune deux sommets opposés, se coupent en un même point; la $n^{ième}$ diagonale passera aussi par ce point.*

THÉORÈME II. — *Si un polygone de $2n$ côtés inscrit dans une conique est tel que $n-1$ systèmes de deux côtés opposés consécutifs se coupent suivant une ligne droite, le $n^{ième}$ système se coupera aussi sur cette droite.*

Il suffira d'établir le théorème (I) dans le cas de l'octogone circonscrit à la conique. Les huit premiers chiffres désignent les équations des côtés consécutifs du polygone,

c_1, c_2, c_3, c_4 les équations des quatre cordes qui joignent deux à deux les points de contact des côtés opposés.

L'équation de la conique aura les quatre formes suivantes

$$\lambda\ (1,5)+c_1^2=0,\quad \lambda'\ (2,6)+c_2^2=0,$$
$$\lambda''(3,7)+c_3^2=0,\quad \lambda'''(4,8)+c_4^2=0.$$

Un système quelconque de valeurs de x, y rend tous les premiers membres identiques pour les coordonnées des points de rencontre des côtés 1, 2 et 5, 6 ; on a

$$c_1=c_2,$$

par la raison que

$$c_1=\mp\sqrt{\lambda(1,5)} \quad \text{et} \quad c_2=\mp\sqrt{\lambda'(2,6)}$$

et que les seconds membres sont nuls. Pour les équations des quatre diagonales qui joignent les sommets opposés, on trouve

$$c_1=c_2,\quad c_2=c_3,\quad c_3=c_4,\quad c_4=c_1;$$

si les trois premières sont satisfaites par les coordonnées x, y d'un même point, il en sera de même de la quatrième.

Les expressions de c_1, c_2, c_3, c_4, ... déduites des relations précédentes, qui sont du second degré, se rapportent à deux figures différentes. Si, par exemple, dans le cas de l'hexagone circonscrit, on prolonge jusqu'à leur rencontre les côtés 1, 3 ; 4, 6 ou 2, 4 ; 5, 1, ou 3, 5 ; 6, 2, on forme trois quadrilatères dont les diagonales se coupent au même point. Leurs extrémités sont les sommets d'un nouveau polygone circonscrit à la conique.