NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GÉRASSIME ORLOW

Sur une intégrale double

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 311-318

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__311_1>

SUR UNE INTÉGRALE DOUBLE ;

PAR M. GÉRASSIME ORLOW.

Dans un Mémoire intitulé : *Sur une intégrale double* (*Annales de l'École Normale supérieure,* t. VII, 1870), Didon montre que la valeur de l'intégrale double

$$(1)\quad \iint (1-x^2-y^2)^{\frac{\mu}{2}-1}(1-2ax+a^2)^{-\frac{\mu}{2}}(1-2by+b^2)^{-\frac{\mu}{2}}\,dx\,dy,$$

dans laquelle les variables x et y sont limitées par la condition $x^2+y^2 \leqq 1$, ne dépend que du produit ab, dans le cas où μ est un nombre entier positif quelconque et où a et b sont moindres que l'unité.

Il déduit cette proposition des formules suivantes :

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\iint (1-x^2-y^2)^{p-\frac{1}{2}}(1-2ax+a^2)^{-p-\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad \times (1-2by+b^2)^{-p-\frac{1}{2}}\,dx\,dy \\
&\quad = 2\pi \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \frac{(ab)^{2m}}{m!\,2^m}\,\frac{(2p+1)(2p+3)\ldots(2p+2m-1)}{4m+3p+1}, \\
&\iint (1-x^2-y^2)^{p-1}(1-2ax+a^2)^{-p} \\
&\qquad\qquad \times (1-2by+b^2)^{-p}\,dx\,dy \\
&\quad = \frac{\pi}{(p-1)!} \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m (ab)^{2m}\,\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p-1)}{2m+p},
\end{aligned}
\right.
$$

où p et m sont également des nombres entiers et positifs.

Nous nous proposons de montrer que la proposition de Didon sur l'intégrale (1) subsiste aussi, dans le cas de μ fractionnaire positif, et que les formules (2) que cet auteur établit indépendamment l'une de l'autre ne sont que deux cas particuliers d'une même formule, que nous déduirons du développement de l'intégrale (1) en série.

Introduisant, au lieu de μ, un nouveau paramètre, en posant

$$\mu = 2\alpha + 1,$$

nous aurons $\alpha > -\frac{1}{2}$, eu égard à la condition $\mu > 0$; et, en même temps, l'intégrale (1) devient

$$
(3)\quad \iint (1-x^2-y^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}}(1-2ax+a^2)^{-\frac{2\alpha+1}{2}}(1-2by+b^2)^{-\frac{2\alpha+1}{2}}\,dx\,dy.
$$

Les résultats que nous avons en vue résultent de la considération de certaines fonctions $\omega_i(x, \alpha)$, définies par l'équation

$$(4)\qquad (1-2ax+a^2)^{-\frac{2\alpha+1}{2}} = \sum_{l=0}^{l=\infty} a^l \omega_l(x,\alpha),$$

où les valeurs numériques de a et x ne surpassent pas l'unité, et α est un paramètre tout à fait arbitraire. La fonction $\omega_l(x,\alpha)$ est un polynôme en x, du degré l, qui se présente sous l'une des formes suivantes :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\omega_l(x,\alpha)\\ &\quad = \frac{(2\alpha+1)\ldots(2\alpha+2l-1)}{l!}\left[x^l - \frac{l(l-1)}{2(2\alpha+2l-1)}x^{l-2}\ldots\right].\end{aligned}\right.$$

$$(6)\qquad \omega_l(x,\alpha) = c_l\frac{1}{(x^2-1)^\alpha}\,\frac{d^l(x^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l},$$

où

$$(7)\qquad c_l = \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)\ldots(2\alpha+2l-1)}{l!}\,\frac{\Gamma(2\alpha+l+1)}{\Gamma(2\alpha+2l+1)}.$$

Considérons d'abord l'intégrale définie

$$(8)\qquad \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\alpha\,\omega_l(x,\alpha)\,x^p\,dx.$$

Au moyen de la formule (6), on obtient

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\alpha\,\omega_l(x,\alpha)\,x^p\,dx\\ &\quad = (-1)^\alpha c_l\int_{-1}^{+1} x^p\,\frac{d^l(x^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l}\,dx.\end{aligned}\right.$$

Mais si dans la formule élémentaire

$$\int U\frac{d^qV}{dx^q}\,dx = \Theta + (-1)^q\int V\frac{d^qU}{dx^q}\,dx,$$

où

$$\Theta = U\frac{d^{q-1}V}{dx^{q-1}} - \frac{dU}{dx}\,\frac{d^{q-2}V}{dx^{q-2}} + \ldots + (-1)^{q-1}\frac{d^{q-1}U}{dx^{q-1}}\,V,$$

et

$$V = (x^2 - 1)^{\alpha+l}, \quad q = l,$$

et observant que, aux limites $x = -1$ et $x = +1$, la quantité Θ s'évanouit sous la condition $\alpha > -1$, on trouvera l'égalité

$$(10) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{+1} \mathrm{U} \frac{d^l (x^2 - 1)^{\alpha+l}}{dx^l} dx \\ \displaystyle = (-1)^l \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^{\alpha+l} \frac{d^l \mathrm{U}}{dx^l} dx, \end{cases}$$

d'où l'on tire, en faisant $\mathrm{U} = x^p$ et $p < l$,

$$\int_{-1}^{+1} x^p \frac{d^l (x^2 - 1)^{\alpha+l}}{dx^l} dx = 0.$$

Ainsi, pour $\alpha > -1$, l'intégrale (8) se réduit à zéro, pour toute valeur entière et positive de l'exposant p, inférieure à l.

On en conclut que, $\varphi(x)$ désignant un polynôme entier, on aura

$$(11) \quad \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^\alpha \omega_l(x, \alpha) \varphi(x)\, dx = 0,$$

toutes les fois que le degré du polynôme $\varphi(x)$ est inférieur à l, et $\alpha > -1$.

En supposant $p \geqq l$, $\mathrm{U} = x^p$, au moyen des formules (9) et (10), on obtient l'égalité

$$(12) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^\alpha \omega_l(x, \alpha) x^p\, dx \\ \displaystyle = c_l p(p-1)\ldots(p-l+1) \int_{-1}^{+1} x^{p-l} (1 - x^2)^{\alpha+l} dx, \end{cases}$$

qui montre que l'intégrale (8) est encore nulle pour $p \geqq l$, lorsque la différence $p - l$ est un nombre impair.

Si la différence $p - l$ est un nombre pair, la dernière intégrale s'exprimera au moyen de la fonction Γ, c'est-à-dire

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} x^{p-l}(1-x^2)^{\alpha+l}\,dx \\ &= \frac{1.3.5\ldots(p-l-1)\,2^{2\alpha+2l+1}}{(2\alpha+2l+1)(2\alpha+2l+3)\ldots(2\alpha+l+p+1)}\,\frac{\Gamma^2(\alpha+l+1)}{\Gamma(2\alpha+2l+1)}.\end{aligned}\right.$$

En portant cette valeur trouvée de l'intégrale dans l'équation (12), et substituant à la constante c_l sa valeur (7), on trouve, après quelques simplifications, la formule suivante :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^2\,\omega_l(x,\alpha)\,x^p\,dx \\ &= \frac{p!}{2^{\frac{p-l}{2}}\left(\frac{p-l}{2}\right)!\,l!}\,\frac{2^{2\alpha+l}\,\Gamma(2\alpha+l+1)}{(2\alpha+1)\ldots(2\alpha+l+p+1)}\left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\right]^2.\end{aligned}\right.$$

Je considère en second lieu l'intégrale double

$$(15)\qquad \iint (1-x^2-y^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}}\,\omega_l(x,\alpha)\,\omega_p(y,\alpha)\,dx\,dy,$$

étendue aux valeurs des variables x et y telles que $x^2+y^2 \leqq 1$ et je vais faire voir que, pour $\alpha > -\frac{1}{2}$, cette intégrale est nulle, toutes les fois que les nombres l et p diffèrent entre eux. La proposition est évidente si l'un des nombres l et p, ou tous deux à la fois, sont impairs. Il ne reste ainsi qu'à démontrer notre proposition dans le cas $l = 2m$, $p = 2n$; m et n sont des nombres entiers positifs et inégaux. A cet effet, je me propose d'abord de déterminer la valeur de l'intégrale

$$(16)\qquad \iint (1-x^2-y^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}}\,\omega_{2m}(x,\alpha)\,y^{2n}\,dx\,dy,$$

dans laquelle les variables satisfont toujours à la condition $x^2+y^2 \leq 1$. Si l'on introduit, au lieu de y, une nouvelle variable t, en posant $y = t\sqrt{1-x^2}$, on aura

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}} y^{2n}\,dy$$
$$= 2(1-x^2)^{\alpha+n} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}} t^{2n}\,dt\,;$$

l'intégrale au second membre, sous la condition $\alpha > -\frac{1}{2}$, s'exprime au moyen de la fonction Γ, de sorte que la seconde partie est égale à

$$\frac{\pi}{2^{2\alpha+n+1}} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)} \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)};$$

par conséquent l'intégrale (16) se réduit à

$$(-1)^n \frac{\pi}{2^{2\alpha+n}} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)} \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)}$$
$$\times \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\alpha}\,\omega_{2m}(x,\alpha)\,(x^2-1)^n\,dx,$$

et par suite, d'après la formule (11), elle est nulle, si n est inférieur à m, car $(x^2-1)^n$ est un polynôme de degré $2n$; de plus, dans le cas $n=m$, on trouve, au moyen de la formule (14), après des réductions faciles qu'elle se réduit à

$$(-1)^m 2\pi \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{(2\alpha+2m+1)(2\alpha+2m+3)\ldots(2\alpha+4m+1)}.$$

On en conclut que, $\varphi(y)$ désignant un polynôme de degré $2n$ et a le coefficient de y^{2n} dans ce polynôme, on aura, pour $n<m$,

$$(17)\qquad \iint (1-x^2-y^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}}\,\omega_{2m}(x,\alpha)\,\varphi(y)\,dx\,dy = 0,$$

et pour $n = m$

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} &\iint (1-x^2-y^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}} \omega_{2m}(x, \alpha)\varphi(y)\,dx\,dy \\ &= (-1)^m a\, 2\pi \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{(2\alpha+2m+1)(2\alpha+2m+3)\ldots(2\alpha+4m+1)}. \end{aligned} \right.$$

Posant, dans (17), $\varphi(y) = \omega_{2n}(y, \alpha)$, on trouve l'égalité

$$(19)\quad \iint (1-x^2-y^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}} \omega_{2m}(x, \alpha)\,\omega_{2n}(y, \alpha)\,dx\,dy = 0,$$

qu'il s'agissait d'établir, et qui s'applique évidemment toutes les fois que les indices m et n sont inégaux, car alors l'un des deux est toujours plus grand que l'autre.

Posant également, dans (18), $\varphi(y) = \omega_{2m}(y, \alpha)$, et, eu égard à l'expression (5), on trouve l'égalité

$$\begin{aligned} &\iint (1-x^2-y^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}} \omega_{2m}(x, \alpha)\,\omega_{2m}(y, \alpha)\,dx\,dy \\ &= (-1)^m \frac{2\pi}{m!\,2^m} \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)\ldots(2\alpha+2m-1)}{2\alpha+4m+1}, \end{aligned}$$

au moyen de laquelle on peut déterminer la valeur de l'intégrale cherchée (3). A cet effet, multipliant l'équation précédente par $(ab)^{2m}$, puis donnant à m toutes les valeurs de $m = 0$ à $m = \infty$, et faisant la somme, on trouve, vu les équations (4) et (19), le résultat suivant :

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} &\iint (1-x^2-y^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}} (1-2ax+a^2)^{-\frac{2\alpha+1}{2}} (1-2by+b^2)^{-\frac{2\alpha+1}{2}} dx\,dy \\ &= 2\pi \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \frac{(ab)^{2m}}{m!\,2^m} \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)\ldots(2\alpha+2m-1)}{2\alpha+4m+1}, \end{aligned} \right.$$

ce qui fait voir que la valeur de l'intégrale double (3) ne dépend que du produit ab, sous la seule condition $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Chacune des formules (2) est un cas particulier de la formule générale (20). Effectivement, en premier lieu, donnant à α, dans la formule (20), une valeur entière, positive quelconque p, on a évidemment la première des formules (2). En second lieu, faisant $\alpha = \frac{2p-1}{2}$ dans la même formule (20), le second membre devient

$$\frac{\pi}{(p-1)!}\sum_{m=0}^{m=\infty}(-m)^m(ab)^{2m}\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p-1)}{2m+p},$$

et la formule même se réduit à la seconde des formules (2).