A. DE SAINT-GERMAIN
A. DE SAINT-GERMAIN

Sur les équations de l'équilibre astatique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 306-311

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__306_1>

SUR LES ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE ASTATIQUE;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Considérons un solide S dont plusieurs points M_1, M_2, ... sont sollicités par des forces données F_1, F_2, ... constantes en grandeur et en direction, quelle que soit la position du solide; un des premiers problèmes qui se présentent est la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que les forces F_i se fassent équilibre dans toutes les positions de S, c'est-à-dire pour qu'il y ait *équilibre astatique*. Le cas où les forces sont parallèles est extrêmement simple; mais il est facile d'y ramener le cas où elles ont des directions diverses, et il me semble que cette réduction donne un moyen des plus commodes et des plus naturels pour obtenir les douze équations de l'équilibre astatique.

Quand les forces F_i sont parallèles à une droite OA, elles ont en général une résultante qu'on peut regarder comme appliquée en un point fixe de S, quelle que soit l'orientation du solide; cette résultante est égale à la somme algébrique des F_i, en regardant comme positives celles qui agissent dans le sens OA, comme négatives celles qui agissent dans le sens opposé. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que cette somme soit nulle, mais cela ne suffit pas; les forces qui agissent dans le sens de OA peuvent être remplacées par une résultante R appliquée en un point déterminé a de S, les autres par une résultante R', appliquée en un point a', égale à R, mais de direction opposée; le couple (R, R'), équivalent au système des forces données, ne sera en équilibre que si le solide est orienté de telle sorte que aa' soit parallèle à OA; pour qu'il y ait équilibre astatique, il faut et il suffit que les points a et a' soient confondus de manière que R et R' soient toujours directement opposées. Prenons trois axes Ox, Oy, Oz, et soient, dans une position quelconque du solide, x_i, y_i, z_i les coordonnées du point M_i; la coïncidence des points a et a' s'exprime par les trois équations bien connues

$$(1)\qquad \Sigma F_i x_i = 0, \quad \Sigma F_i y_i = 0, \quad \Sigma F_i z_i = 0.$$

Supposons maintenant que les forces aient des directions différentes, et cherchons les conditions de l'équilibre astatique. Il faut d'abord que la résultante de translation, indépendante de la position de S, soit nulle; prenons encore trois axes de coordonnées et décomposons chacune des forces F_i en trois forces X_i, Y_i, Z_i parallèles à ces axes; la somme algébrique des composantes parallèles à chacune des trois directions devant être nulle, nous avons les trois premières équations de l'équilibre astatique

$$(2) \qquad \Sigma X_i = 0, \quad \Sigma Y_i = 0, \quad \Sigma Z_i = 0,$$

La première de ces relations montre que, parmi les forces X_i, les unes agissent dans le sens Ox, tandis que les autres, ayant une somme égale en valeur absolue à la somme des premières, agissent dans le sens opposé; ces deux systèmes de composantes peuvent être remplacés respectivement par deux résultantes A et A', égales et de sens contraires, appliquées en des points a, a' dont la position, par rapport au solide, est indépendante de son orientation. De même, les forces Y_i pourront être remplacées par deux forces B et B', égales et de sens contraires, appliquées en des points déterminés, b et b', de S; les forces Z_i seront équivalentes à deux forces C, C', égales et de sens contraires, appliquées aux points c, c' de S. Ainsi le système des forces Fi peut toujours être remplacé par trois couples dont les bras aa', bb', cc' ont une position déterminée dans le solide, mais non dans l'espace; je dis qu'il ne saurait y avoir équilibre astatique que si les points a, b, c coïncident respectivement avec a', b', c'.

Nous allons voir en effet que si les distances aa', bb', cc' ne sont pas toutes trois nulles, on peut amener le solide dans une position telle que les six forces A, A', B, B', C, C' ne se fassent pas équilibre. Orientons d'abord S de manière que aa' soit parallèle à Ox; les forces A et A′ seront directement opposées, et il faudra, pour que S soit en équilibre, que les couples (B, B′), (C, C′) se fassent équilibre; or cela exige d'abord que ces couples agissent dans des plans parallèles, et puisque B et B′ sont parallèles à Oy, C et C′ à Oz, les plans des deux couples devront être parallèles à Oyz; il faut donc que les droites bb', cc' soient parallèles à ce plan. Si les axes de coordonnées sont obliques, il suffira de faire tourner S, et avec lui bb' et cc', autour de aa', pour détruire le parallélisme des droites bb' et cc' avec Oyz, et rendre impossible l'équilibre des deux couples; si les axes sont rectangulaires et si bb', cc' sont parallèles à Oyz, je fais tourner S autour de aa' de manière que bb' devienne parallèle à Oz; les plans des deux couples sont parallèles, mais il faut encore que leurs moments soient égaux et de signes contraires; si cette condition est satisfaite, il suffira, comme le montre une figure simple, de faire tourner le solide de 180° autour de bb' pour changer de signe le moment du couple formé par C et C′, tandis que celui du couple (B, B′), qui n'est pas nul, ne changera pas, et que la droite aa' restera parallèle à Ox, en sorte qu'il n'y aura plus équilibre. Dans le cas où l'une des distances aa', bb', cc', ou deux d'entre elles seraient nulles, des considérations analogues aux précédentes, mais bien plus simples, montreraient qu'on peut toujours orienter S de manière qu'il n'y ait pas équilibre.

La coïncidence des points a et a', b et b', c et c', nécessaire pour l'équilibre astatique, est suffisante; car, si elle a lieu, les couples (A, A′), (B, B′), (C, C′) auront toujours des moments égaux à zéro, et dans toutes les positions du solide, les systèmes des X_i, des Y_i, des Z_i se feront séparément équilibre. Il suffit d'appliquer à chacun de ces systèmes les relations (1) pour avoir neuf équations

$$(3)\qquad \begin{cases} \Sigma X_i x_i = 0, & \Sigma X_i y_i = 0, & \Sigma X_i z_i = 0, \\ \Sigma Y_i x_i = 0, & \Sigma Y_i y_i = 0, & \Sigma Y_i z_i = 0, \\ \Sigma Z_i x_i = 0, & \Sigma Z_i y_i = 0, & \Sigma Z_i z_i = 0, \end{cases}$$

qui, avec les équations (2), nous donneront les douze équations de l'équilibre astatique.

Quand ces équations ne sont pas satisfaites, on peut se demander combien il faudrait introduire de forces analogues aux F_i pour assurer l'équilibre astatique ; il est aisé de voir que deux forces ne suffisent pas en général. Prenons des axes tels que ΣX_i et ΣY_i soient nuls, et soient X, Y, Z, X', Y', Z' les composantes des deux forces cherchées F et F', x, y, z, x', y', z' les coordonnées de leurs points d'application ; écrivons, en adjoignant les forces F et F' aux F_i, les deux premières équations (2), et les première, deuxième, quatrième et cinquième du groupe (3) :

$$X + X' = 0, \quad Y + Y' = 0,$$

$$\Sigma X_i x_i + X x + X' x' = 0, \quad \Sigma X_i y_i + X y + X' y' = 0,$$

$$\Sigma Y_i x_i + Y x + Y' x' = 0, \quad \Sigma Y_i y_i + Y y + Y' y' = 0,$$

Entre ces équations on peut éliminer $X, X', Y, Y', x, x', y, y'$, et l'on trouve

$$\frac{\Sigma X_i x_i}{\Sigma X_i y_i} = \frac{\Sigma Y_i x_i}{\Sigma Y_i y_i},$$

condition qui n'est généralement pas satisfaite avec les forces proposées.

Au contraire, on peut, d'une infinité de manières, trouver trois forces qui tiennent constamment en équilibre les forces F_i quand leur résultante de translation n'est pas nulle. Choisissons les axes coordonnés de telle sorte que

ΣX_i, ΣY_i, ΣZ_i soient différents de zéro; on peut remplacer le système des X_i par une force A appliquée en un point déterminé a de S; de même, les systèmes des Y_i et des Z_i seront toujours respectivement équivalents à deux forces B, C agissant sur deux points b et c convenablement choisis dans S. Cela posé, il est clair que, si aux forces F_i on associe trois forces, $-$A, $-$B, $-$C appliquées en a, b, c, on établira l'équilibre astatique.

Quand la résultante de translation des F_i est nulle, le système est équivalent au système de trois couples (A, A') (B, B'), (C, C') dont les bras ont, par rapport à S, une position déterminée; si l'on introduit trois couples dont les forces et les bras soient respectivement parallèles aux forces et aux bras des trois premiers, avec des moments égaux et de signes contraires, on aura encore un équilibre astatique.