HALPHEN

Sur la théorie du déplacement

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 296-299

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__296_0>

SUR LA THÉORIE DU DÉPLACEMENT;

PAR M. HALPHEN.

M. Cyparissos Stephanos a fait connaître, dans le *Bulletin de la Société Philomathique* (7e série, tome VI, page 13), l'élégante proposition que voici :

Trois figures égales, situées d'une manière arbitraire sur un plan, coïncident avec les symétriques d'une même figure, prises respectivement par rapport à trois droites.

Le même géomètre a énoncé aussi, dans une communication verbale, une proposition analogue et relative à trois positions, occupées dans l'espace par une même figure, dont un point reste fixe. En cherchant à généraliser encore, j'ai été conduit à mettre sous une forme très simple les éléments de la théorie du déplacement. C'est ce que je me propose de faire voir dans cette Note.

Soient, dans l'espace, F_1 et F_2 deux positions d'une même figure, tellement choisies qu'une droite de la figure F_1 coïncide avec son homologue de la figure F_2, non seulement en position, mais encore en direction. Soit A_{12} cette droite. La figure F_1 étant donnée, ainsi que la droite A_{12}, on obtient F_2 en imprimant à F_1 deux mouvements, l'un de translation, l'autre de rotation, le long et autour de A_{12}. L'ordre dans lequel s'effectuent ces deux mouvements n'influe pas sur le résultat. S'ils s'effectuent ensemble et par quantités proportionnelles, le mouvement résultant est hélicoïdal. Pour cette raison, le déplacement est dit *hélicoïdal*. Ici on ne considère que le déplacement final, sans avoir égard au mouvement par lequel on l'obtient.

Je dirai qu'un déplacement hélicoïdal est la moitié d'un autre déplacement hélicoïdal, si, l'axe étant le même pour tous deux, la translation et la rotation le long et autour de cet axe sont, pour le premier et le second respectivement, dans les rapports de 1 à 2.

Dans F_1 prenons une droite D_1 rencontrant l'axe A_{12} à angle droit. La droite homologue, dans F_2, est de même une droite D rencontrant l'axe à angle droit. Ces deux droites D et D_1 ont un axe de symétrie et un seul, quand on suppose ces droites caractérisées non seulement par leurs positions, mais encore par des directions choisies sur chacune d'elles. Les directions étant choisies ici homologues, l'axe de symétrie est une droite D_2, rencontrant l'axe A_{12} à angle droit, et sur laquelle viendrait s'appliquer D_1 par le déplacement $\frac{1}{2}(A_{12})$, moitié du déplacement (A_{12}) changeant F_1 en F_2.

Faisons tourner la figure F_1 d'une demi-circonférence autour de D_1, nous obtenons une figure F. Les droites D_1 et A_{12} de F_1 ont pour homologues, dans F, les droites D_1 et A'_{12}, cette dernière n'étant autre que A_{12} changée de sens.

Faisons ensuite tourner F d'une demi-circonférence autour de D_2; nous obtenons une figure égale, dans laquelle les homologues de D_1 et A'_{12} sont D et A_{12}, puisque D est symétrique de D_1, par rapport à D_2. Cette dernière figure est, par conséquent, F_2. J'ai donc la proposition suivante :

Soit un déplacement hélicoïdal (A_{12}) *changeant une figure* F_1 *en une figure* F_2. *Prenons une droite* D_1 *rencontrant à angle droit l'axe du déplacement, et la droite* D_2, *sur laquelle viendra s'appliquer* D_1 *par le déplacement* $\frac{1}{2}(A_{12})$. *Les symétriques de* F_1 *et* F_2 *prises* *respectivement par rapport à* D_1 *et* D_2 *coïncident entre elles.*

Prenons maintenant une nouvelle position F_3 de la même figure, en donnant à F_2 un déplacement hélicoïdal (A_{23}) autour d'un autre axe. Les figures F_2 et F_3 seront de même les symétriques d'une figure F' par rapport à deux axes D'_2, D_3. Mais D_2 et D'_2 peuvent être arbitrairement choisies parmi les droites qui rencontrent à angle droit l'une A_{12}, l'autre A_{23}. On peut donc faire coïncider D_2 et D'_2, en choisissant la perpendiculaire commune à A_{12} et A_{23}. Alors F et F' coïncident, et F_1, F_2, F_3 sont symétriques d'une seule et même figure F, respectivement par rapport à trois droites D_1, D_2, D_3.

Soit maintenant A_{13} la perpendiculaire commune à D_1 et D_3. Cette droite, envisagée dans F, a pour homologue A'_{13}, c'est-à-dire elle-même, mais changée de sens, aussi bien dans F_1 que dans F_3. Ainsi A_{13}, considérée soit dans F_1, soit dans F_3, est à elle-même sa propre homologue. Elle est donc l'axe d'un déplacement hélicoïdal changeant F_1 en F_3. Ce déplacement est le résultant des deux précédents, et il est manifeste que le demi-déplacement $\frac{1}{2}(A_{13})$ est celui qui change D_1 en D_3. Ainsi :

Soient deux déplacements hélicoïdaux, ayant pour axes A_{12} *et* A_{23}.

Soient :

D_2 *la perpendiculaire commune à ces deux axes ;*

D_1 *la droite qui est amenée sur* D_2 *par le demi-déplacement* $\frac{1}{2}(A_{12})$;

D_3 *la droite sur laquelle est amenée* D'_2 *par le demi-déplacement* $\frac{1}{2}(A_{23})$;

Les deux déplacements (A_{12}), (A_{23}), *étant opérés successivement et dans cet ordre, équivalent à un déplacement hélicoïdal unique* (A_{13}), *dont l'axe est la per-*

pendiculaire commune à D_1 et D_3. Le demi-déplacement $\frac{1}{2}(A_{13})$ *est celui qui amène D_1 sur D_3* [1].

Deux droites *dirigées* ayant, comme je l'ai observé plus haut, un axe de symétrie, on peut amener en coïncidence deux droites homologues de deux figures égales par une rotation. Il est donc évident que tout déplacement peut être obtenu, d'une infinité de manières, par deux déplacements hélicoïdaux successifs. La dernière proposition donne donc le théorème fondamental :

Tout déplacement dans l'espace équivaut à un déplacement hélicoïdal.

En conséquence, dans le raisonnement ci-dessus, F_1, F_2, F_3 sont trois positions tout à fait arbitraires d'une même figure, et la proposition de M. Stephanos se généralise ainsi :

Trois positions quelconques d'une même figure dans l'espace sont les symétriques d'une seule et même figure, prises respectivement par rapport à trois droites.

Chaque axe de symétrie est la perpendiculaire commune aux axes de deux des déplacements hélicoïdaux qui amènent les figures données les unes sur les autres.

---

(1) Pour le cas particulier de deux rotations autour d'axes qui se rencontrent, on retrouve le résultat démontré par M. Brisse dans son Mémoire *Sur le déplacement fini quelconque d'une figure de forme invariable* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. I, p. 142).