E. DORLET

Concours général de 1880

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 256-268

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__256_1>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1880.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. E. DORLET,
Élève du lycée de Dijon.

Sur une courbe donnée du troisième degré, ayant un point de rebroussement O, *on considère une suite de points* A_{-n}, $A_{-(n-1)}$, ..., A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n, *tels que la tangente en chacun de ces points rencontre la courbe au point suivant:*

1° *Étant données les coordonnées du point* A_0, *on propose de trouver les coordonnées des points* A_{-n}, A_n, *et de déterminer les limites vers lesquelles tendent ces points quand l'indice n augmente indéfiniment.*

2° *On demande le lieu décrit par le premier point limite lorsque la courbe du troisième degré se déforme en conservant le même point de rebroussement* O, *la même tangente en ce point, et en passant constamment par trois points fixes* P, Q, R.

3° *On étudiera comment varient les points d'intersec-*

tion de ce lieu et des côtés du triangle PQR, *quand les sommets de ce triangle se déplacent sur des droites passant par le point* O.

1° L'équation d'une courbe du troisième degré ayant un point de rebroussement à l'origine et pour tangente en ce point l'axe des x est

$$\beta y^2 - \alpha^3 = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$\beta = Ax + By + C,$$
$$\alpha = x + my.$$

Le point $\alpha = 0$, $\beta = 0$, où $\beta = 0$ a avec la courbe trois points communs coïncidents est le point d'inflexion et $\beta = 0$ la tangente en ce point.

Les équations

$$\frac{y}{\alpha} = \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \lambda^2 \quad \text{ou} \quad \frac{\beta}{\lambda^3} = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{y}{1},$$

prises simultanément, représentent un point de la courbe. Nous désignerons par x_p, y_p les coordonnées de A_p, par α_p, β_p, λ_p les valeurs correspondantes de α, β, λ.

L'équation de la tangente au point (α_0, β_0, y_0) est

$$-3\alpha\alpha_0^2 + \beta y_0^2 + 2y\beta_0 y_0 = 0,$$

ou

$$2\lambda_0^3 y - 3\lambda_0^2\alpha + \beta_0 = 0.$$

Les coordonnées de A_1 devront satisfaire à la relation

$$2\lambda_0^3 y_1 - 3\lambda_0^2\alpha_1 + \beta_1 = 0,$$

ou

$$2\lambda_0^3 - 3\lambda_0^2\lambda_1 + \lambda_1^3 = 0,$$

d'où, en supprimant le facteur $(\lambda_1 - \lambda_0)^2$,

$$\lambda_1 + 2\lambda_0 = 0.$$

De même

$$\lambda_2 + 2\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_0 + 2\lambda_{-1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\lambda_n + 2\lambda_{n-1} = 0, \quad \lambda_{-n+1} + 2\lambda_{-n} = 0.$$

On déduit, en éliminant les λ intermédiaires,

$$\lambda_n = (-2)^n \lambda_0, \quad \lambda_{-n} = \frac{\lambda_0}{(-2)^n}.$$

Les coordonnées du point qui correspond à λ sont données par

$$Ax + By + C = \lambda^3 y,$$
$$x + my = \lambda y,$$

d'où

$$(\lambda^3 - A\lambda + Am - B)\,y = C,$$
$$(\lambda^3 - A\lambda + Am - B)\,x = C(\lambda - m).$$

En appliquant au point A_n, et remplaçant, dans le résultat considéré comme homogène en λ_n^3, λ_n et 1, ces trois quantités par β_0, α_0 et γ_0, on aura

$$[(-2)^{3n}\beta_0 - (-2)^n A\alpha_0 + (Am - B)y_0]\,y_n = Cy_0,$$
$$[(-2)^{3n}\beta_0 - (-2)^n A\alpha_0 + (Am - B)y_0]\,x_n$$
$$= C[(-2)^n\alpha_0 - my_0].$$

En remplaçant n par $-n$, on aura les coordonnées de A_{-n}.

Lorsque n croît indéfiniment, λ_n croît indéfiniment en valeur absolue, et λ_{-n} tend vers zéro; les droites $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda_n^2$ et $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{\lambda_n}$, $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda_{-n}^2$ et $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{\lambda_{-n}}$ tendent respectivement vers les droites $\alpha = 0$ et $y = 0$, $\beta = 0$ et $\alpha = 0$; le point A_n tend vers le point O, et le point A_{-n} vers le point d'inflexion de la courbe, intersection des droites $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

2° Soient (p, p'), (q, q'), (r, r') les coordonnées des trois points P, Q, R. En prenant, avec les trois conditions qui expriment que la courbe passe par ces points, les deux équations $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, on a les équations qui donnent un point quelconque du lieu,

$$\begin{aligned}
(Ap + Bp' + C)p'^2 - (p + mp')^3 &= 0,\\
(Aq + Bq' + C)q'^2 - (q + mq')^3 &= 0,\\
(Ar + Br' + C)r'^2 - (r + mr')^3 &= 0,\\
Ax + By + C &= 0,\\
x + my &= 0;
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit, par l'élimination de m,

$$\begin{aligned}
Ax + By + C &= 0,\\
Ap + Bp' + C - \frac{(py - p'x)^3}{p'^2 y^3} &= 0,\\
Aq + Bq' + C - \frac{(qy - q'x)^3}{q'^2 y^3} &= 0,\\
Ar + Br' + C - \frac{(ry - r'x)^3}{r'^2 y^3} &= 0.
\end{aligned}$$

En éliminant A, B, C, et supprimant le facteur $\frac{1}{y^3}$, on a l'équation du lieu

$$\begin{vmatrix}
0 & x & y & 1\\
\frac{(py - p'x)^3}{p'^2} & p & p' & 1\\
\frac{(qy - q'x)^3}{q'^2} & q & q' & 1\\
\frac{(ry - r'x)^3}{r'^2} & r & r' & 1
\end{vmatrix} = 0.$$

On voit que la courbe passe par les trois points P, Q, R. L'équation est du quatrième degré ; mais elle est vérifiée pour $y = 0$ (l'hypothèse $y = 0$ rend proportionnels les éléments de la première et de la troisième colonne). En ajoutant à la première colonne la troisième multipliée par x^3, on met en évidence le facteur y ; après l'avoir supprimé, ajoutons à la première colonne la seconde multipliée par $-3x^2$. Il vient ainsi

$$\begin{vmatrix} -3x^3 & x & y & 1 \\ \frac{p^2}{p'} y \left(\frac{p}{p'} y - 3x\right) & p & p' & 1 \\ \frac{q^2}{q'} y \left(\frac{q}{q'} y - 3x\right) & q & q' & 1 \\ \frac{r^2}{r'} y \left(\frac{r}{r'} y - 3x\right) & r & r' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les termes de moindre degré sont

$$\begin{vmatrix} \frac{p^2}{p'} y \left(\frac{p}{p'} y - 3x\right) & p & p' \\ \frac{q^2}{q'} y \left(\frac{q}{q'} y - 3x\right) & q & q' \\ \frac{r^2}{r'} y \left(\frac{r}{r'} y - 3x\right) & r & r' \end{vmatrix}.$$

En mettant y en facteur, divisant par $p'q'r'$, de manière à avoir partout l'unité dans la troisième colonne, puis retranchant la troisième ligne successivement de la première et de la seconde, et développant le déterminant, on trouve pour l'équation des tangentes à l'origine, qui est un point double,

$$\left(\frac{q}{q'} - \frac{r}{r'}\right)\left(\frac{r}{r'} - \frac{p}{p'}\right)\left(\frac{p}{p'} - \frac{q}{q'}\right) y \left[\left(\frac{p}{p'} + \frac{q}{q'} + \frac{r}{r'}\right) y - 3x\right] = 0.$$

Si deux des points P, Q, R sont en ligne droite avec l'origine, le facteur $\left(\frac{q}{q'} - \frac{r}{r'}\right)\left(\frac{r}{r'} - \frac{p}{p'}\right)\left(\frac{p}{p'} - \frac{q}{q'}\right)$ s'annule ; du reste, ce facteur n'entre pas dans les termes du troisième degré ; le coefficient du terme en x^3 par exemple, qui est le déterminant $\begin{vmatrix} p & p' & 1 \\ q & q' & 1 \\ r & r' & 1 \end{vmatrix}$, ne s'annule pas pour $\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'}$. L'équation représente donc dans ce cas trois droites passant par O. Il n'y a pas lieu du reste d'examiner ce cas, car si les deux points P et Q sont en ligne droite avec O, il n'y a pas de véritable courbe du troisième degré remplissant les conditions énoncées.

Dans le cas général, le lieu est donc une courbe du troisième degré admettant à l'origine un point double où les tangentes sont OX et la droite $x = \frac{1}{3}\left(\frac{p}{p'} + \frac{q}{q'} + \frac{r}{r'}\right)$, qui joint le point O au centre de gravité des trois points déterminés sur une parallèle à OX par les droites OP, OQ, OR, ou, ce qui revient au même, au centre des moyennes harmoniques des points déterminés par ces droites sur une droite quelconque, par rapport à son point d'intersection avec OX.

3° Cherchons le troisième point d'intersection avec la courbe de la droite QR dont l'équation est

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ q & q' & 1 \\ r & r' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous prendrons l'équation de la courbe sous la première forme, sauf à écarter plus tard la solution $y = 0$. En développant par rapport aux éléments de la première colonne et tenant compte de l'équation de QR, on a

$$\frac{(qy - q'x)^3}{q'^2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & p' & 1 \\ r & r' & 1 \end{vmatrix} - \frac{(ry - r'x)^3}{r'^2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & p' & 1 \\ q & q' & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\frac{[q(y-q')-q'(x-q)]^3}{q'^2}\begin{vmatrix} x-r & y-r' \\ p-r & p'-r' \end{vmatrix}$$
$$=\frac{[r(y-r')-r'(x-r)]^3}{r'^2}\begin{vmatrix} x-q & y-q' \\ p-q & p'-q' \end{vmatrix}.$$

De l'équation de QR on déduit

$$x-r=(y-r')\,\frac{q-r}{q'-r'},$$
$$x-q=(y-q')\,\frac{q-r}{q'-r'}.$$

En substituant, et supprimant $(y-r')\,(y-q')$, on a

$$\frac{(qr'-q'r)^3}{q'^2}(y-q')^2\begin{vmatrix} q & q' & 1 \\ p & p' & 1 \\ r & r' & 1 \end{vmatrix}$$
$$=\frac{(rq'-qr')^3}{r'^2}(y-r')^2\begin{vmatrix} r & r' & 1 \\ p & p' & 1 \\ q & q' & 1 \end{vmatrix};$$

$qr'-q'r$ est supposé différent de zéro. En supposant aussi

$$\begin{vmatrix} p & p' & 1 \\ q & q' & 1 \\ r & r' & 1 \end{vmatrix}=0,$$

on aura

$$\frac{y-q'}{q'}=\pm\frac{y-r'}{r'},$$

d'où, en supprimant la solution $y=0$,

$$y\left(\frac{1}{q'}+\frac{1}{r'}\right)=2,$$

ou

$$\frac{2}{y}=\frac{1}{q'}+\frac{1}{r'}.$$

On voit que le point cherché est le conjugué harmonique du point où la droite QR coupe OX par rapport au segment QR. Si les points Q et R parcourent deux droites issues d'un point quelconque de OX, quel que soit d'ailleurs le lieu de P, le troisième point d'intersection de la courbe avec QR décrira une droite qui sera la conjuguée harmonique de OX par rapport aux deux premières. Si les points P, Q, R décrivent trois droites issues de O, les points d'intersection de la courbe avec les côtés de PQR décrivent chacun une droite issue de O.

Nous avons supposé le déterminant $\begin{vmatrix} p & p' & 1 \\ q & q' & 1 \\ r & r' & 1 \end{vmatrix}$ différent de zéro. Si les points P, Q, R sont en ligne droite, ce déterminant est nul, et par conséquent la droite PQR fait partie du lieu. C'est ce qu'on voit directement sur l'équation, en développant par rapport aux éléments de la première colonne. Outre cela, le lieu comprendra une ligne du second degré ayant un point double en O, et qui se réduira nécessairement aux deux tangentes en ce point, c'est-à-dire aux droites OX et

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{p}{p'} + \frac{q}{q'} + \frac{r}{r'}\right).$$

Les droites OX et PQR doivent être considérées comme des solutions étrangères, car si une courbe du troisième degré, passant par P, Q, R et ayant un point de rebroussement en O, a un autre point (point d'inflexion) sur OX ou sur PQR, elle se compose nécessairement de droites. La véritable solution est la droite

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{p}{p'} + \frac{q}{q'} + \frac{r}{r'}\right).$$

Ce résultat peut s'énoncer de la manière suivante :

Si P, Q, R *sont les points d'intersection d'une droite* *avec une courbe de troisième degré ayant un point de rebroussement* O, *le point d'inflexion est sur la droite joignant le point* O *au centre des moyennes harmoniques des points* P, Q, R *par rapport au point d'intersection de* OX *avec la droite* PQR.

Voici comment on peut obtenir géométriquement quelques-uns des résultats qui précèdent.

Considérons une courbe du troisième degré ayant un point de rebroussement en O, passant par les trois points P, Q, R et ayant un point d'inflexion M sur la droite QR. Soit P'Q'R' un triangle dont les sommets soient avec ceux de PQR en ligne droite avec O. Si l'on construit la courbe homologique de la première par rapport au point O, en prenant les points P', Q', R' pour homologues des points P, Q, R, on aura une courbe du troisième degré passant par P', Q', R' et ayant son point d'inflexion M' à l'intersection de QR et de OM. On déduit de là que les points d'intersection de QR, quel que soit leur nombre, avec le lieu des points d'inflexion des courbes du troisième degré remplissant les conditions données, décrivent, lorsque P, Q, R se meuvent sur des droites issues de O, des droites passant également par O.

On peut remarquer aussi que toutes les courbes du troisième degré ayant un point de rebroussement sont des projections de la courbe $ky^2 = x^3$. Or, si par le point d'inflexion de cette courbe, qui est à l'infini dans la direction OY, on mène une droite quelconque, c'est-à-dire une parallèle à OY, elle est divisée en parties égales par la courbe et par la tangente OX au point de rebroussement. En projection, cette droite sera divisée harmoniquement par la courbe, le point d'inflexion et son point d'intersection avec la tangente au rebroussement. On déduit facilement de là que le point désigné par M est sur une droite issue de O, droite qui est la conjuguée harmonique de OX par rapport à OQ et à OR.

Considérons maintenant une des courbes du troisième degré ayant un point de rebroussement en O et admettant OX pour tangente en ce point. Soit A un point de OX. Menons par A une sécante quelconque, et soient P, Q, R les points où elle coupe la courbe, et A′ le centre des moyennes harmoniques de ces points par rapport au point A. Lorsque la sécante tourne autour de A, le point A′, qui est toujours sur cette sécante, ne peut appartenir à une autre sécante que s'il est en P ; ce qui est impossible, puisque aucun des points P, Q, R ne peut venir au point A qui n'est pas sur la courbe. Le lieu de A′ ne coupe donc qu'en un point toutes les droites issues de P : ce lieu est donc une droite. Cette droite passe évidemment par O, puisque les trois points d'intersection de OX et de la courbe sont en O. Si la sécante est menée par le point d'inflexion, ce point est le conjugué harmonique de A par rapport aux deux autres points d'intersection avec la courbe. Il est facile de voir d'après cela que ce point n'est autre que A′. Donc, si P, Q, R sont les points d'intersection d'une droite avec la courbe, le point d'inflexion est sur la droite qui joint le point O au centre des moyennes harmoniques des points P, Q, R par rapport au point d'intersection de la droite et de OX.

Note. — La même question a été résolue par M. E. Chrétien, élève du lycée du Havre.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

PAR M. MORET-BLANC.

I. *Résoudre le système de n équations à n inconnues*

$$x_1(x_2+x_3+\ldots+x_n)$$
$$+1.2(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2=9a^2,$$
$$x_2(x_1+x_3+\ldots+x_n)$$
$$+2.3(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2=25a^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x_n(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})$$
$$+n(n+1)(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2=(2n+1)^2a^2.$$

Posons $x_1+x_2+\ldots+x_n=\mathrm{S}$, et soit x_i l'une quelconque des inconnues. On a

$$x_i(\mathrm{S}-x_i)+i(i+1)\mathrm{S}^2=(2i+1)^2a^2,$$

ou

$$x_i^2-\mathrm{S}x_i-i(i+1)\mathrm{S}^2+(2i+1)^2a^2=0,$$

d'où

$$x_i=\frac{\mathrm{S}\pm(2i+1)\sqrt{\mathrm{S}^2-4a^2}}{2}.$$

Il ne reste plus, pour avoir toutes les inconnues, qu'à trouver S.

Supposons d'abord que toutes les inconnues doivent être positives; chacune d'elles étant moindre que leur demi-somme, il faudra prendre le radical avec le signe — et écrire

$$x_i=\frac{\mathrm{S}-(2i+1)\sqrt{\mathrm{S}^2-4a^2}}{2}.$$

En donnant à i successivement les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$, et ajoutant, on a

$$\mathrm{S}=\frac{n\mathrm{S}-n(n+2)\sqrt{\mathrm{S}^2-4a^2}}{2},$$

d'où

$$S = \frac{2n(n+2)a}{\sqrt{[n(n+2)]^2-(n-2)^2}},$$

et

$$x_i = \frac{[n(n+2)-(2i+1)(n-2)]a}{\sqrt{[n(n+2)]^2-(n-2)^2}}.$$

En donnant à i les valeurs 1, 2, 3, ..., n, on aura la solution en nombres positifs.

Si l'on admet pour les inconnues des valeurs positives ou négatives, il faudra prendre chaque radical avec le double signe, et les diverses combinaisons de signes donneront en tout n^2 solutions.

II. *D'un point O, pris dans le plan d'un cercle, partent quatre droites qui coupent sa circonférence, la première aux points a et a', la deuxième aux points b et b', la troisième aux points c et c', et la quatrième aux points d et d'.*

Prouver que les sinus des moitiés des arcs ac, bd, ad, bc, a'c', b'd', a'd', b'c' sont liés entre eux par la relation

$$\frac{\sin\frac{ac}{2}\sin\frac{bd}{2}\sin\frac{a'd'}{2}\sin\frac{b'c'}{2}}{\sin\frac{cb}{2}\sin\frac{da}{2}\sin\frac{d'b'}{2}\sin\frac{b'c'}{2}} = 1.$$

Les couples de droites ab' et $a'b$, ac' et $a'c$, ad' et $a'd$ se coupent en des points β, γ, δ situés sur la polaire du point O, laquelle coupe aa' en un point α.

Cela posé, les rapports anharmoniques des deux faisceaux $a'(a, b, c, d)$ et $a(a', b', c', d')$ respectivement égaux à ceux des quatre points α, β, γ, δ sont égaux entre eux, ce qui donne immédiatement la relation proposée.

On peut éviter la considération du rapport anharmonique. Soient p et p' les distances des points a et a' à la polaire du point O. En exprimant de deux manières les surfaces des triangles $a'\alpha\gamma$, $a'\beta\delta\ldots$, on a

$$2\,\text{surf.}\ a'\alpha\gamma = a'\alpha . a'\gamma \sin\frac{ac}{2} = p'.\alpha\gamma,$$

$$2\,\text{surf.}\ a'\beta\delta = a'\beta . a'\delta \sin\frac{bd}{2} = p'.\beta\delta,$$

$$2\,\text{surf.}\ a\alpha\delta = a\alpha . a\delta \sin\frac{a'd'}{2} = p.\alpha\delta,$$

$$2\,\text{surf.}\ a\beta\gamma = a\beta . a\gamma \sin\frac{b'c'}{2} = p.\beta\gamma,$$

$$2\,\text{surf.}\ a'\beta\gamma = a'\beta . a'\gamma \sin\frac{bc}{2} = p'.\beta\gamma,$$

$$2\,\text{surf.}\ a'\alpha\delta = a'\alpha . a'\delta \sin\frac{ad}{2} = p'.\alpha\delta.$$

$$2\,\text{surf.}\ a\beta\delta = a\beta . a\delta \sin\frac{b'd'}{2} = p.\beta\delta,$$

$$2\,\text{surf.}\ a\alpha\gamma = a\alpha . a\gamma \sin\frac{a'c'}{2} = p.\alpha\gamma.$$

En ne considérant, dans chaque ligne, que la dernière égalité, et divisant le produit des quatre premières par celui des quatre dernières, on a, après suppression des facteurs communs,

$$\frac{\sin\frac{ac}{2}\sin\frac{bd}{2}\sin\frac{a'd'}{2}\sin\frac{b'c'}{2}}{\sin\frac{bc}{2}\sin\frac{ad}{2}\sin\frac{b'd'}{2}\sin\frac{a'c'}{2}} = 1.$$

C. Q. F. D.