NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GAMBEY

Solution de la question de mécanique élémentaire proposée au concours d'agrégation de 1879

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 254-256

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__254_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1879;

PAR M. GAMBEY.

Une lame homogène, pesante, et d'une épaisseur infiniment petite, a la forme d'un demi-cercle ABC; *elle est soutenue par un fil attaché aux extrémités du diamètre* AB, *et qui passe dans un anneau fixe infiniment petit* O.

On demande de déterminer les positions d'équilibre de la lame et de reconnaître dans quels cas cet équilibre est stable ou instable.

On donne la longueur l du fil, le rayon R *du demi-cercle* ACB *et le poids* P *de la lame.*

(*On négligera le poids du fil.*)

NOTA. — *Pour reconnaître si l'équilibre est stable ou instable, on pourra chercher pour quelles positions de la lame la distance du centre de gravité* G *de cette lame* *au plan horizontal qui passe par l'anneau* O *est un maximum ou un minimum.*

On reconnaît aisément que la verticale du point de suspension doit faire des angles égaux avec les deux brins du fil.

Cela posé, traçons AG, BG, OG. Les triangles AOG, BOG donnent

$$\frac{\mathrm{OG}}{\sin\widehat{\mathrm{OAG}}} = \frac{\mathrm{AG}}{\sin\widehat{\mathrm{AOG}}} = \frac{\mathrm{BG}}{\sin\widehat{\mathrm{BOG}}} = \frac{\mathrm{OG}}{\sin\widehat{\mathrm{OBG}}},$$

d'où

$$\sin\widehat{\mathrm{OAG}} = \sin\widehat{\mathrm{OBG}}$$

et, par suite,

$$\widehat{\mathrm{OAG}} = \widehat{\mathrm{OBG}};$$

par conséquent

$$\widehat{\mathrm{OAB}} = \widehat{\mathrm{OBA}}$$

ou bien

$$\widehat{\mathrm{OAG}} + \widehat{\mathrm{OBG}} = 180^\circ,$$

et le quadrilatère OAGB est inscriptible.

Il y a donc trois positions d'équilibre, dont deux sont symétriques par rapport à la verticale du point de suspension.

Autrement. — La recherche des positions d'équilibre de la figure pesante revient à construire un triangle, connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux. La discussion est connue et l'on retrouve le résultat précédent.

On a, dans le quadrilatère inscriptible OAGB,

$$\mathrm{OG}.\,2\mathrm{R} = \mathrm{BG} \times \mathrm{AO} + \mathrm{AG} \times \mathrm{BO} = \mathrm{AG} \times l.$$

d'où

$$\mathrm{OG} = \frac{\mathrm{AG} \times l}{2\mathrm{R}},$$

et comme, dans tout quadrilatère OAGB, on a

$$\mathrm{OG} \times \mathrm{AB} < \mathrm{BG} \times \mathrm{AO} + \mathrm{AG} \times \mathrm{BO},$$

il en résulte que OG est maximum quand le quadrilatère OAGB est inscriptible. Par suite, les positions d'équilibre, symétriques de la verticale du point de suspension, sont des positions d'équilibre stable. La troisième est par suite instable.

Note. — La même question a été résolue par M. E. Fauquembergue.