Nouvelles annales de mathématiques

Gambey

Solution de la question de mathématiques spéciales proposée au concours d'agrégation de 1879

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 245-254

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__245_0>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1879;

Par M. GAMBEY,
Professeur au lycée de Saint-Étienne.

On donne un hyperboloïde à une nappe et un point A. *On considère un paraboloïde circonscrit à l'hyperboloïde et tel que le plan* P *de la courbe de contact passe par le point* A; *soit* M *le point d'intersection de ce paraboloïde avec celui de ses diamètres qui passe par le point* A; *soit* Q *le point de rencontre du plan* P *avec la droite qui joint le point* M *au pôle du plan* P *par rapport à l'hyperboloïde.*

Le plan P *tournant autour du point* A, *on demande :*

1° *Le lieu du point* M;

2° *Le lieu du point* Q : *ce second lieu est une surface du second degré* S *que l'on discutera en faisant varier la position du point* A *dans l'espace;*

3° *Le lieu des positions que doit occuper le point* A *pour que la surface* S *soit de révolution.*

L'hyperboloïde donné, rapporté à son centre et à ses axes, ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

si je transporte les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes, de manière que la nouvelle origine soit au point donné A (α, β, γ), l'équation précédente deviendra

$$(1) \qquad \frac{(x+\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y+\beta)^2}{b^2} - \frac{(z+\gamma)^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Celle du plan P sera

$$lx + my + nz = 0,$$

l, m, n étant des paramètres arbitraires.

Si je désigne, pour abréger, par S le premier membre de (1), l'équation d'une surface du second ordre, circonscrite à l'hyperboloïde suivant la courbe de contact déterminée par le plan P dans cet hyperboloïde, sera

$$\lambda S - (lx + my + nz)^2 = 0,$$

et, pour qu'elle représente un paraboloïde, on a la condition

$$\lambda^2(a^2l^2 + b^2m^2 - c^2n^2 - \lambda) = 0.$$

Le facteur λ^2, égalé à zéro, donnerait un plan double. L'autre facteur donne

$$\lambda = a^2l^2 + b^2m^2 - c^2n^2,$$

et l'équation du paraboloïde devient alors

$$(2)\quad (a^2l^2 + b^2m^2 - c^2n^2)S - (lx + my + nz)^2 = 0.$$

I. *Lieu du point* M. — Les diamètres du paraboloïde (2) étant conjugués du plan P, celui qui passe en A a pour équations

$$(3)\qquad \frac{\frac{x}{a^2}}{l} = \frac{\frac{y}{b^2}}{m} = -\frac{\frac{z}{c^2}}{n}.$$

Le lieu du point M où le diamètre (3) rencontre le paraboloïde (2) s'obtiendra en éliminant l, m et n entre les équations (2) et (3), ce qui se fait immédiatement en substituant à ces paramètres les quantités proportionnelles $\frac{x}{a^2}$, $\frac{y}{b^2}$, $-\frac{z}{c^2}$.

L'équation obtenue se décompose en deux autres, savoir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

$$\frac{2\alpha x}{a^2} + \frac{2\beta y}{b^2} - \frac{2\gamma z}{c^2} + \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 = 0.$$

La première représente le cône asymptote de l'hyperboloïde donné, transporté parallèlement à lui-même de manière que son sommet vienne en A. C'est une solution singulière correspondant au cas de $\lambda = 0$.

Le plan représenté par la seconde équation est parallèle au plan polaire du point A par rapport à l'hyperboloïde et se confond avec le plan tangent en A à cette surface, quand le point A est sur l'hyperboloïde.

Si le point A est situé au centre de l'hyperboloïde, ce deuxième lieu est rejeté à l'infini.

II. *Lieu du point* Q. — Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un des points M du lieu précédent, et x_1, y_1, z_1 celles du pôle du plan P par rapport à l'hyperboloïde donné.

Les équations de la droite qui joint ce pôle au point M sont

$$(4) \qquad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Cette droite rencontre le plan qui a pour équation

$$(5) \qquad lx + my + nz = 0$$

en un point qui appartient au lieu cherché.

Mais, si l'on identifie l'équation (5) avec celle du plan polaire du point (x_1, y_1, z_1) par rapport à l'hyperboloïde, on obtient les relations

$$(6) \qquad \frac{x_1 + \alpha}{a^2 l} = \frac{y_1 + \beta}{b^2 m} = \frac{z_1 + \gamma}{-c^2 n},$$

$$(7) \qquad \frac{\alpha(x_1 + \alpha)}{a^2} + \frac{\beta(y_1 + \beta)}{b^2} - \frac{\gamma(z_1 + \gamma)}{c^2} - 1 = 0,$$

et l'on a en outre

$$(8) \qquad \frac{x_0}{a^2 l} = \frac{y_0}{b^2 m} = \frac{z_0}{c^2 n},$$

$$(9) \qquad \frac{2\alpha x_0}{a^2} + \frac{2\beta y_0}{b^2} - \frac{2\gamma z_0}{c^2} + k = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 = k.$$

Il faut éliminer les coordonnées de M, celles du pôle du plan P et les rapports de deux des coefficients l, m, n au troisième, entre les équations numérotées de (4) à (9).

De (6) et (8) on déduit immédiatement

$$\frac{x_1 + \alpha}{x_0} = \frac{y_1 + \beta}{y_0} = \frac{z_1 + \gamma}{z_0},$$

ce qui exige, pour que les équations (7) et (9) soient compatibles, que l'on ait encore

$$2x_0 + k(x_1 + \alpha) = 0,$$
$$2y_0 + k(y_1 + \beta) = 0,$$
$$2z_0 + k(z_1 + \gamma) = 0.$$

Tirant de là les valeurs de x_1, y_1, z_1 en fonction de x_0, y_0, z_0 et substituant dans les équations (4), on en déduit, si l'on désigne par $\frac{1}{\mu}$ la valeur commune des trois rapports (4),

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_0 &= \frac{k}{k(\mu - 1) - 2}(\mu x + \alpha), \\ y_0 &= \frac{k}{k(\mu - 1) - 2}(\mu y + \beta), \\ z_0 &= \frac{k}{k(\mu - 1) - 2}(\mu z + \gamma). \end{aligned} \right.$$

D'autre part, si l'on substitue à l, m, n dans (5) les quantités proportionnelles $\frac{x_0}{a^2}$, $\frac{y_0}{b^2}$ et $\frac{z_0}{-c^2}$, il vient

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 0. \tag{11}$$

Il ne reste plus qu'à porter dans (9) et (11) les valeurs (10) de x_0, y_0, z_0 pour obtenir les deux équations suivantes

$$\left(\frac{2\alpha x}{a^2} + \frac{2\beta y}{b^2} - \frac{2\gamma z}{c^2} + k\right)\mu + k = 0,$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)\mu + \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - \frac{\gamma z}{c^2} = 0,$$

entre lesquelles μ s'élimine immédiatement. On obtient ainsi

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - \frac{\gamma z}{c^2}\right)^2$$
$$= \frac{k}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2}\right).$$

Le lieu du point Q est donc une surface du second ordre. Cette surface passe par le point A et par la courbe d'intersection du cône

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

et du plan

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - \frac{\gamma z}{c^2} + \frac{k}{2} = 0.$$

Elle se réduit à un plan double quand on a $k = 0$.

Nous supposerons dans ce qui suit k différent de zéro.

Discussion. — L'équation développée du lieu du point Q peut être mise sous la forme

$$\left(\frac{2\alpha^2}{a^2} - k\right)\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{2\beta^2}{b^2} - k\right)\frac{y^2}{b^2}$$
$$+ \left(\frac{2\gamma^2}{c^2} + k\right)\frac{z^2}{c^2} - \frac{4\beta\gamma}{b^2c^2}yz$$
$$- \frac{4\gamma\alpha}{c^2a^2}zx + \frac{4\alpha\beta}{a^2b^2}xy + k\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - \frac{\gamma z}{c^2}\right) = 0.$$

Les équations du centre se ramènent aisément à celles-ci

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=-\frac{k}{2(k+2)}.$$

Le centre de la surface S est donc situé sur la droite qui joint le point A au centre de l'hyperboloïde donné.

Supposons l'équation de S ramenée à la forme

$$S_1X^2+S_2Y^2+S_3Z^2=H,$$

et calculons le terme connu H. Nous obtiendrons facilement

$$H=\frac{k^2(k+1)}{4(k+2)}.$$

Il faut maintenant déterminer les signes des coefficients S_1, S_2, S_3, qui sont, comme on sait, les racines de l'équation en S.

Prenons cette équation sous la forme connue

$$\frac{1}{B^2(S-a_1)}+\frac{1}{B'^2(S-b_1)}+\frac{1}{B''^2(S-c_1)}-\frac{1}{BB'B''}=0,$$

où nous faisons

$$A-\frac{B'B''}{B}=a_1,\quad A'-\frac{B''B}{B'}=b_1\quad\text{et}\quad A''-\frac{BB'}{B''}=c_1.$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, nous avons

$$a_1=-\frac{k}{a^2},\quad b_1=-\frac{k}{b^2},\quad c_1=\frac{k}{c^2},$$

et l'équation en S devient

$$(12)\qquad \frac{\frac{\alpha^2}{a^4}}{S+\frac{k}{a^2}}+\frac{\frac{\beta^2}{b^4}}{S+\frac{k}{b^2}}+\frac{\frac{\gamma^2}{c^4}}{S-\frac{k}{c^2}}-\frac{1}{2}=0.$$

Supposons $a^2>b^2$ et distinguons les deux cas de $k>0$ et $k<0$.

1° $h > 0$. — En faisant varier S de $-\frac{k}{b^2}+\varepsilon$ à $-\frac{k}{a^2}-\varepsilon'$, ε et ε' étant des quantités très petites, le premier membre de l'équation (12) passe du positif au négatif en restant fini et continu; il y a donc une racine négative comprise entre $-\frac{k}{b^2}$ et $-\frac{k}{a^2}$. Si S varie ensuite de zéro à $\frac{k}{c^2}-\varepsilon''$, le premier membre de (12) varie de $\frac{k+2}{2k}$, quantité positive, jusqu'à une quantité négative; il y a donc une racine positive entre zéro et $\frac{k}{c^2}$. Enfin on s'assure aisément qu'il y a une autre racine positive supérieure à $\frac{k}{c^2}$. Comme le terme H est alors positif, la surface S est un *hyperboloïde à une nappe*.

2° $h < 0$. — Il y a une première racine entre $\frac{k}{c^2}$ et $-\frac{k}{a^2}$. Pour déterminer son signe, faisons $S = 0$. Le premier membre de (12) devient $\frac{k+2}{2k}$. Si l'on a

$$k+2 < 0,$$

cette quantité étant alors positive, la racine considérée est négative. Il y a en outre une racine positive entre $-\frac{k}{a^2}$ et $-\frac{k}{b^2}$, et une autre, aussi positive, plus grande que $-\frac{k}{b^2}$. Cette dernière reste positive quel que soit le signe de $k+2$. Donc, pour $k+2 < 0$, les trois racines de l'équation en S sont positives, et comme alors H est aussi positif, la surface est un *ellipsoïde réel*.

Mais, pour $k+2 > 0$, deux racines étant positives et l'autre négative, comme on a alors $H > 0$ si $k+1 > 0$, et $H < 0$ si $k+1 < 0$, il en résulte que la surface est un *hyperboloïde à une nappe* si $k+1 > 0$, et un *hyperboloïde à deux nappes* si $k+1 < 0$.

Pour $k+1=0$, la surface est un *cône réel*.

Il reste à examiner l'hypothèse $k+2=0$.

Dans ce cas, le centre est à l'infini sur la droite

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}.$$

La surface est alors un paraboloïde.

Pour $z=0$, le premier membre de l'équation de la surface S devient

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}\right)^2=\frac{k}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2x}{a^2}-\frac{\beta y}{b^2}\right),$$

équation d'une ellipse dans l'hypothèse de $k=-2$. Donc la surface est alors un *paraboloïde elliptique*.

Remarque. — Dans la discussion qui précède, la surface S se trouve rapportée à des axes de directions fixes, mais dont l'origine est variable : cela ne peut en rien changer la nature de la surface discutée.

Interprétation géométrique du résultat de la discussion. — Revenons aux axes primitifs de coordonnées par rapport auxquels nous regarderons α, β, γ comme des coordonnées courantes. La relation $k+1=0$ représente alors le cône asymptote de l'hyperboloïde donné et la relation $k+2=0$ son hyperboloïde conjugué.

Donc :

Si le point A est situé à l'extérieur du cône asymptote de l'hyperboloïde donné, *la surface S est un hyperboloïde à une nappe*;

Si ce point est sur le cône asymptote, la surface S est un *cône réel;*

S'il est situé à l'intérieur du cône asymptote, mais, par rapport à l'hyperboloïde conjugué de l'hyperboloïde donné, dans la même région que le centre, la surface S est un *hyperboloïde à deux nappes;*

S'il se trouve sur l'hyperboloïde conjugué, la surface S est un *paraboloïde elliptique;*

Enfin, si le point A est, par rapport à l'hyperboloïde conjugué, dans la région où ne se trouve pas le centre, la surface S est un *ellipsoïde réel.*

Il a déjà été dit que, si le point A est sur l'hyperboloïde donné, la surface S est un plan double.

III. *Conditions pour que la surface* S *soit de révolution.* — Les trois quantités a_1, b_1, c_1 ne pouvant être égales que si $k = 0$, auquel cas elles sont nulles, il faut exprimer que deux des coefficients des rectangles des variables sont nuls à la fois. Cela arrivera pour $\gamma = 0$, par exemple. Mais on doit avoir en outre la relation

$$\frac{4\alpha^2\beta^2}{a^2 b^2} = \left[\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)\frac{\alpha^2}{a^2} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{\beta^2}{b^2} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\right]$$
$$\times \left[-\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{\alpha^2}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\frac{\beta^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right],$$

qui, abstraction faite d'un facteur constant, se décompose en deux, savoir

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0.$$

La première rentre dans l'hypothèse $k = 0$. La seconde représente une conique dans le plan des $\alpha\beta$.

Les hypothèses $\beta = 0$ et $\alpha = 0$ donneraient deux autres coniques ayant pour équation dans leur plan

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\frac{\gamma^2}{c^2} - 1 = 0,$$
$$\frac{a^2 + b^2}{-a^2 + b^2}\frac{\beta^2}{b^2} + \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}\frac{\gamma^2}{c^2} - 1 = 0.$$

En supposant $a^2 > b^2$, nous aurons à distinguer les trois cas de

$$c^2 < b^2, \quad b^2 < c^2 < a^2, \quad a^2 < c^2.$$

1° $c^2 < b^2$. — Les coniques situées dans les plans des $\alpha\beta$ et des $\alpha\gamma$ sont des ellipses réelles, et celle qui est située dans le plan des $\beta\gamma$ est une hyperbole.

2° $b^2 < c^2 < a^2$. — Les trois coniques sont des hyperboles.

3° $a^2 < c^2$. — Les coniques situées dans les plans des $\alpha\beta$ et des $\beta\gamma$ sont des ellipses imaginaires; celle qui est située dans le plan des $\alpha\gamma$ est une hyperbole.

Note. — M. Gambey a également résolu la question de licence dont une solution a déjà paru (2e série, t. XX, p. 57).