Concours général de 1881

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 189-192

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__189_1>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1881.

Mathématiques spéciales.

Trouver le lieu des points tels que les pieds des six normales qu'on peut mener de l'un quelconque d'entre eux à un ellipsoïde donné à trois axes inégaux se sépare en deux groupes de trois points dont les plans respectifs soient parallèles entre eux.

Montrer que, si l'on se donne un point P du lieu, la solution de ce problème : mener du point P les normales à l'ellipsoïde, dépend de la résolution de deux équations du troisième degré. Discuter ces équations.

Mathématiques élémentaires.

I. Étant donné un triangle ABC inscrit dans un cercle de rayon R, on mène les bissectrices intérieures des angles A, B, C; soient A_1, B_1, C_1 les points où elles rencontrent le cercle.

1° Désignant par S, S_1 les aires des triangles ABC, $A_1B_1C_1$ et par d le diamètre du cercle inscrit au triangle ABC, on propose de démontrer que l'on a

$$\frac{S_1}{S} = \frac{R}{d}.$$

II. On considère une suite indéfinie de triangles ABC, $A_1B_1C_1, \ldots, A_nB_nC_n, \ldots$, tous inscrits dans le même cercle, et dont chacun se déduit du précédent, comme, dans l'énoncé ci-dessus, le triangle $A_1B_1C_1$ se déduit du triangle ABC; démontrer que, lorsque le nombre entier m augmente indéfiniment, le triangle $A_{2m}B_{2m}C_{2m}$ tend vers une position limite $\alpha\beta\gamma$; dans les mêmes conditions, le triangle $A_{2m+1}B_{2m+1}C_{2m+1}$ tend aussi vers une position limite $\alpha'\beta'\gamma'$; les deux triangles limites $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ sont équilatéraux et symétriquement placés par rapport au centre du cercle.

III. Démontrer que, si l'on prend pour unité le rayon R du cercle, le produit des nombres qui mesurent les diamètres des cercles inscrits aux triangles ABC, $A_1B_1C_1, \ldots, A_nB_nC_n$, tend vers une limite lorsque n augmente indéfiniment.

Philosophie.

Étant donné un carré ABCD inscrit dans un cercle et un point I dans le plan de ce cercle, on mène les droites qui joignent ce point aux quatre sommets A, B, C, D du carré; soient A′, B′, C′, D′ les points où ces droites rencontrent le cercle une seconde fois; démontrer que l'on a, entre les côtés du quadrilatère A′B′C′D′, la relation

$$A'B' \times C'D' = B'C' \times A'D'.$$

Réciproquement, étant donnés quatre points A′, B′, C′, D′ sur un cercle, tels que l'on ait cette même relation

$$A'B' \times C'D' = B'C' \times A'D',$$

on propose de trouver, dans le plan du cercle, un point I tel que, si l'on mène les droites qui le joignent aux points A′, B′, C′, D′, les points A, B, C, D, où ces droites rencontrent une seconde fois le cercle, soient les sommets d'un carré.

Rhétorique.

I. Un tronc de cône est tel que sa hauteur est moyenne proportionnelle entre les diamètres de ses deux bases. On propose :

1° De démontrer qu'on peut inscrire une sphère dans ce tronc de cône;

2° La hauteur H étant donnée, de déterminer les rayons des deux bases, de manière que la surface totale du tronc de cône soit équivalente à un cercle de rayon a. Discussion.

II. Mesure de temps. Jour solaire vrai. Jour solaire moyen.

Seconde.

I. Soit un carré ABCD; par deux sommets opposés A et C de ce carré, on mène, d'un même côté par rapport au plan du carré, les droites AK, CL perpendiculaires à ce plan. On prend sur AK un point A′, dont la distance au centre du carré est égale au côté du carré, et, sur CL, un point C′, dont la distance au point A′ est égale au double du côté du carré.

1° Démontrer que la droite A′C′ est perpendiculaire au plan BDA′;

2° Former, en appelant a le côté du carré, l'expression du volume de chacun des tétraèdres A′A B D, C′C B D, C′A′BD.

II. Soit, sur une droite indéfinie, deux points fixes, A et B, dont la distance est 10^m. Deux mobiles parcourent cette droite dans le sens AB et arrivent en même temps l'un en A, avec une vitesse de 3^m par seconde, l'autre en B avec une vitesse de v mètres par seconde. Le mouvement du premier mobile est uniformément accéléré : sa vitesse s'accroît de 1^m par seconde; le mouvement de second mobile est uniforme. On demande :

1° Dans combien de secondes, après le passage simultané du premier mobile en A et du second en B, le premier mobile aura-t-il rejoint le second?

2° Quelle condition doit remplir la vitesse v du second mobile pour que la rencontre ait lieu à une distance du point B inférieure à 10^{m}?

3° A quelle distance du point B a lieu cette rencontre quand $v = 4^{m}$?