Concours général de 1879

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 184-189
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__184_1>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1879.

PHILOSOPHIE

PAR M. A. LEINEKUGEL.

PREMIÈRE QUESTION. — *On donne un quadrilatère* ABCD : *inscrire dans ce quadrilatère un trapèze isoscèle* MNPQ, *dont le sommet* M *est donné et dont les deux côtés parallèles* MN, PQ *sont parallèles à la diagonale* AC *du quadrilatère. Pour quelles positions du point* M *ce trapèze se réduit-il à un triangle?*

Par M menons la parallèle à AC qui rencontre BC en N. Sur le milieu de MN élevons une perpendiculaire qui coupe CD en S; prenons le symétrique C′ de C par rapport à cette perpendiculaire; C′S coupe AD en Q; par ce point Q, menons QP parallèle à AC. Le quadrilatère MNPQ est le trapèze cherché.

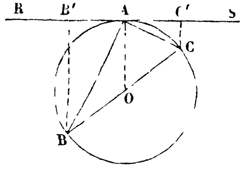
Si l'un des quatre sommets coïncide avec B ou D, on aura évidemment un triangle et dans ce cas seulement. On mènera par les points B et D des perpendiculaires à la diagonale AC et l'on continuera la construction comme tout à l'heure. On obtiendra ainsi quatre positions pour le point M, distinctes en général.

TROISIÈME,

PAR M. H. LEZ.

Première question. — *On donne une circonférence* O *et une droite* RS *tangente à cette circonférence au point* A; *on prend un diamètre quelconque* BC, *et des extrémités* B, C *de ce diamètre on abaisse les perpendiculaires* BB′, CC′ *sur la tangente* RS; *on mène les cordes* AB, AC.

Démontrer que le rapport de l'aire du triangle ABC *à l'aire du trapèze* BB′C′C *est le même quelle que soit la direction du diamètre* BC.



Le triangle ABC se compose des triangles BOA, COA, dont les surfaces sont

$$\frac{AO}{2}AB', \quad \frac{AO}{2}AC'.$$

La surface totale est donc égale à

$$\frac{AO}{2}(AB' + AC'),$$

c'est-à-dire à la moitié du trapèze BB'C'C

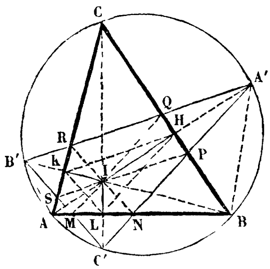
C. Q. F. D.

Deuxième question. — *Soit* I *le point de concours des hauteurs d'un triangle* ABC; *on construit un second triangle* A'B'C' *dont les sommets* A', B' *et* C' *sont respectivement symétriques du point* I *par rapport aux droites* BC, AC, AB :

1° *Démontrer que les deux triangles* ABC, A'B'C' *sont inscrits dans un même cercle;*

2° *Évaluer les angles du triangle* A'B'C' *en supposant connus les angles du triangle* ABC;

3° *Désignant par* M *et par* N *les points où la droite* AB *rencontre les droites* B'C' *et* C'A', *par* P *et par* Q *les points où la droite* BC *rencontre les doites* C'A' *et* A'B',



enfin par R *et par* S *les points où la droite* CA *rencontre les droites* A'B' *et* B'C', *démontrer que les trois droites* MQ, NR, PS *passent par un même point.*

Dans chaque question, on examinera séparément les cas où les trois angles du triangle ABC *sont aigus et le cas où l'un d'entre eux,* A *par exemple, est obtus.*

Dans les deux cas, les côtés du triangle A′B′C′ sont parallèles aux côtés du triangle HKL formé par les pieds des hauteurs du triangle ABC, d'où

$$\widehat{C'A'B'} = H, \quad \widehat{A'B'C'} = K, \quad \widehat{B'C'A'} = L$$

Considérons d'abord un triangle acutangle. Les quadrilatères AKIL, BHIL, CKIH étant inscriptibles, nous avons

$$\widehat{IHK} = \widehat{ICK} = \widehat{IBL} = \widehat{IHL},$$
$$\widehat{IKH} = \widehat{ICH} = \widehat{IAL} = \widehat{IKL},$$
$$\widehat{ILH} = \widehat{IBH} = \widehat{IAK} = \widehat{ILK}.$$

Par suite, les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices intérieures du triangle A′B′C′ et les angles A′, B′, C′ valent deux fois le complément des angles A, B, C.

L'angle ACB, par exemple, étant le complément de KAI = KAB′ = HBA′ = HBI, les angles AB′B, AA′B, ACB sont égaux; donc, les sommets B′, C, A′ sont sur un même segment.

Si nous joignons le point de concours I aux points de rencontre M, Q, R, N, S, P, les quadrilatères IPA′Q, IMC′N étant des losanges, MI et IQ sont parallèles à C′A′ : donc MQ est une ligne droite.

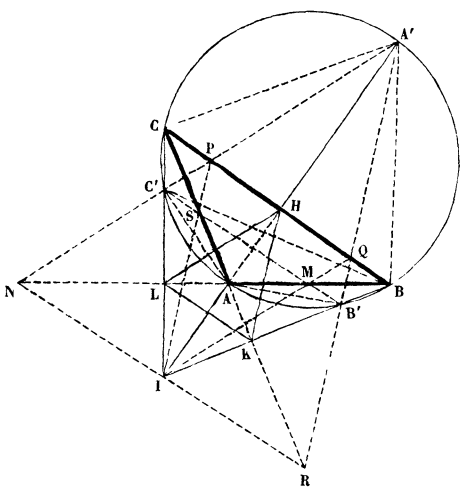
Par la même raison, RN et SP sont aussi des lignes droites passant par le point I et parallèles à KL, KH.

Lorsque le triangle est obtusangle, en A par exemple, les angles du triangle HKL n'ont pas la même valeur que dans le premier cas. En effet, les quadrilatères ALIK, ALCH, AHBK étant inscriptibles, nous avons

$$\widehat{HLA} = \widehat{ACH} = \widehat{AIK} = \widehat{ALK},$$

$$\widehat{AKH} = \widehat{ABH} = \widehat{AIL} = \widehat{AKL}.$$

Les angles L, K sont donc doubles des angles C et B et par suite l'angle H est le double de $90° - (C + B)$.



Quant aux triangles ABC et A′B′C′, ils restent encore inscriptibles dans le même cercle, car les triangles égaux C′AB et IAB, A′HB et IHB, B′AK et IAK donnent

$$\widehat{AC'B} = \widehat{AIB} = \widehat{ACB},$$

$$\widehat{HA'B} = \widehat{HIB} = \widehat{ACB},$$

$$\widehat{AB'K} = \widehat{AIK} = \widehat{ACB}.$$

Enfin, après avoir joint, comme dans le premier cas, le point I aux points de rencontre des côtés du triangle A′B′C avec ceux du triangle ABC, nous trouvons encore que, à cause des losanges IPA′Q, IMC′N, les droites IQ, IM sont parallèles à HL; les trois points I, M, Q sont donc en ligne droite : donc, etc.