MAURICE D'OCAGNE

Sommation d'une série remarquable

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 171-173
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__171_1>

SOMMATION D'UNE SÉRIE REMARQUABLE;

Par M. Maurice D'OCAGNE,
Élève de l'École Polytechnique.

Dans un Mémoire inséré aux *Annales de Gergonne* (¹), de Stainville considère une série remarquable dont il étudie les propriétés et fait diverses applications.

Gergonne (²), puis Ampère (³) sont revenus sur

(¹) Tome IX, page 229.
(²) Tome IX, pages 261 et 270.
(³) Tome XV, page 369.

cette série, simplifiant les démonstrations du premier auteur, poussant plus loin les conséquences de son théorème; mais aucun de ces géomètres ne s'est occupé de la sommation de cette série; cette recherche fait l'objet de la présente Note.

La série de Stainville est

$$\begin{aligned}&1 + a\frac{z}{1} + a(a+k)\frac{z^2}{1.2} + \ldots\\&\quad + a(a+k)\ldots[a+(n-1)k]\frac{z^n}{1.2\ldots n} + \ldots,\end{aligned}$$

prise pour les valeurs de $z < \frac{1}{k}$, et que je représenterai par $S(a, k)$.

La propriété fondamentale de cette série, démontrée dans les Mémoires cités, consiste en ce que

$$S(a+b, k) = S(a, k)\,S(b, k).$$

Cela posé, dérivons $S(a, k)$ par rapport à z,

$$\begin{aligned}\frac{dS(a,k)}{dz} &= a + a(a+k)\frac{z}{1} + \ldots\\&\quad + a(a+k)\ldots[a+(n-1)k]\frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \ldots\\&= a\left[1 + (a+k)\frac{z}{1} + \ldots\right.\\&\quad\left. + (a+k)\ldots[a+(n-1)k]\frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \ldots\right]\\&= aS(a+k, k),\end{aligned}$$

ou, d'après la propriété fondamentale,

$$\frac{dS(a,k)}{dz} = aS(a,k)\,S(k,k).$$

Mais

$$S(k,k) = 1 + kz + k^2z^2 + \ldots + k^nz^n + \ldots.$$

Or

$$z < \frac{1}{k}, \quad \text{ou} \quad kz < 1.$$

Donc,

$$S(k, k) = \frac{1}{1 - kz};$$

par suite,

$$\frac{d\,S(a, k)}{dz} = \frac{a}{1 - kz}\,S(a, k),$$

ou

$$\frac{d\,S(a, k)}{S(a, k)} = a\,\frac{dz}{(1 - kz)}.$$

Intégrons alors, en remarquant que, pour $z = 0$, $S(a, k) = 0$; nous avons

$$\log S(a, k) = -\,\frac{a}{k}\log(1 - kz),$$

et, en remontant des logarithmes aux nombres,

$$S(a, k) = (1 - kz)^{-\frac{a}{k}}.$$