V. Liguine

Sur les systèmes articulés de MM. Peaucellier, Hart et Kempe

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 153-163

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__153_1>

SUR LES SYSTÈMES ARTICULÉS DE MM. PEAUCELLIER, HART ET KEMPE;

PAR M. V. LIGUINE,
Professeur à l'Université d'Odessa.

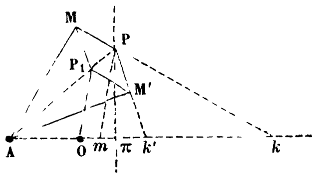
1. Au point de vue de la Cinématique appliquée, pour avoir une connaissance complète d'un *mécanisme* donné, on doit, après avoir considéré la nature des trajectoires décrites par ses différents points, étudier encore les relations qui ont lieu entre les vitesses de ces points.

Depuis la belle découverte de M. Peaucellier, le nombre des mécanismes s'est accru de plusieurs appareils servant à transformer un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne ou *vice versa.* Lorsqu'il s'agira d'une application pratique de ces appareils, il sera important, pour pouvoir les comparer et en choisir le plus convenable, de connaître la loi du mouvement transformé et les rapports des vitesses des différentes parties du mécanisme. Récemment, M. d'Ocagne a déterminé géométriquement les rapports des vitesses dans l'appareil de M. Peaucellier (1). Je me propose, dans cette Note, d'établir la relation entre les chemins parcourus dans le mouvement donné et le mouvement transformé, ainsi que les rapports des vitesses, pour les trois appareils de MM. Peaucellier, Hart et Kempe, qui paraissent être, parmi tous les systèmes articulés analogues, les plus importants au point de vue des applications.

Ces trois appareils sont représentés sur les *fig.* 1, 2 et 3 (2). Les tiges y sont indiquées par des traits continus; les deux points fixes sont toujours désignés par A et O, le point décrivant la ligne droite par P et le point qui se meut sur une circonférence passant par l'un des points fixes, A, par P_1.

2. Considérons d'abord le système de M. Peaucellier. La droite décrite par le point P (*fig.* 1) est perpendicu-

Fig. 1.



laire à la ligne des centres; soit π le pied de cette perpendiculaire. Posons $A\pi = a$, $P\pi = s$, angle $P_1O\pi = \alpha$. Dans le triangle rectangle $P\pi A$, l'angle P_1AO est égal à

(1) Voir ce Journal, 2e série, t. XX, p. 456.

(2) Pour la description de ces appareils, voir mon Mémoire *Sur les systèmes de tiges articulées* (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIV, p. 529).

$\frac{\alpha}{2}$, car $OP_1 = OA$, et l'on trouve

$$s = a \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}. \tag{1}$$

C'est la relation qui lie l'espace rectiligne parcouru par le point P à l'angle décrit dans le même temps par la tige OP_1.

Pour obtenir le rapport des vitesses dans ces deux mouvements, il suffit de différentier l'équation (1) relativement au temps t; on obtient

$$\frac{ds}{dt} = \frac{a}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \frac{d\alpha}{dt}.$$

Or, $\frac{ds}{dt}$ est la vitesse v du mouvement rectiligne du point P et $\frac{d\alpha}{dt}$ est la vitesse angulaire ω de rotation de la tige OP_1 autour de O; donc

$$\frac{v}{\omega} = \frac{a}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{2}$$

La rotation de OP_1 étant uniforme, la vitesse du point P variera en raison inverse du carré du cosinus de l'angle $\frac{\alpha}{2}$; la formule (2) montre que cette vitesse ne s'annule jamais.

Tirons Pm parallèlement à P_1O. Le triangle isoscèle AmP donne

$$Am = \frac{AP}{2\cos\frac{\alpha}{2}},$$

ou bien, puisque $A\pi = a = AP\cos\frac{\alpha}{2}$,

$$Am = \frac{a}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Donc, eu égard à l'équation (2),

$$\frac{v}{\omega} = Am,$$

construction trouvée par M. d'Ocagne. De plus, en désignant respectivement par Ω et Ω' les vitesses angulaires de rotation des tiges AM et A'M autour du point A et en prolongeant les droites MP, PM' jusqu'à leurs intersections k et k' avec la ligne des centres AO, on a, comme l'a démontré M. d'Ocagne,

$$\frac{v}{\Omega} = Ak, \quad \frac{v}{\Omega'} = Ak'.$$

Donc

$$(3) \qquad v = \omega . Am = \Omega . Ak = \Omega' . Ak'.$$

Telle est l'expression géométrique des relations entre les vitesses v, ω, Ω, Ω' des divers mouvements à considérer dans le système de M. Peaucellier.

3. Dans l'appareil de M. Hart (*fig.* 2) la droite $P\pi$ décrite par le point P est aussi perpendiculaire à la ligne des centres AO. En posant

$$A\pi = a, \quad P\pi = s, \quad \text{angle } P_1Om = \alpha,$$

le triangle rectangle $A\pi P$ donne, comme précédemment, eu égard à ce que $OP_1 = OA$,

$$(4) \qquad s \pm a \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2};$$

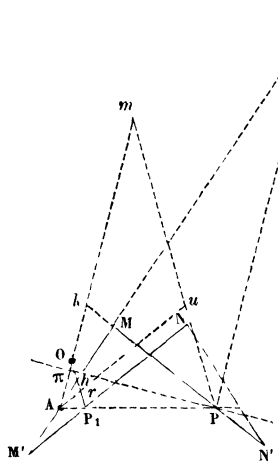
le rapport de la vitesse v de P à la vitesse angulaire ω

de OP_1 est donc aussi

$$\frac{v}{\omega} = \frac{a}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{5}$$

On voit que la loi du mouvement rectiligne dans

Fig. 2.



l'appareil Hart et le rapport de vitesses établi par ce système sont précisément les mêmes que dans l'appareil Peaucellier.

Outre les vitesses v et ω, dans le mécanisme Hart, on n'a à considérer que la vitesse angulaire Ω de la tige MM' autour du point A. Cherchons à construire graphiquement les rapports entre ces trois vitesses v, ω et Ω.

Le point M se déplace sur la circonférence de rayon AM et le point décrit la droite $P\pi$; par conséquent, le centre instantané de rotation relatif au déplacement de la tige MN' se trouve au point d'intersection i de AM prolongée avec la perpendiculaire Pi à $P\pi$, et l'on a, en désignant par v'

la vitesse du point M,

$$\frac{v}{v'} = \frac{Pi}{Mi}.$$

Or, $v' = \Omega . AM$; donc

$$\frac{v}{\Omega} = \frac{Pi . AM}{Mi}.$$

Prolongeons PM et AO jusqu'à leur rencontre en k. Les droites Ak, Pi étant parallèles, la similitude des triangles MPi, MkA donne

$$\frac{Pi}{Mi} = \frac{Ak}{AM}, \quad \text{d'où} \quad \frac{Pi . AM}{Mi} = Ak;$$

donc

$$(6) \qquad \frac{v}{\Omega} = Ak.$$

Pour construire le rapport des vitesses v et ω, observons que les points P_1 et M' décrivent respectivement les circonférences de rayons OP_1 et AM'; le centre instantané relatif au déplacement de la tige $M'N$ se trouve donc au point h et l'on a, en désignant la vitesse du point P_1 par v'' et celle du point M' par v''',

$$\frac{v'''}{v''} = \frac{M'h}{P_1h}.$$

Mais $v''' = \Omega . AM'$, $v'' = \omega . OP_1$; donc

$$\frac{\Omega . AM'}{\omega . OP_1} = \frac{M'h}{P_1h} \quad \text{ou} \quad \frac{\Omega}{\omega} = \frac{M'h . OP_1}{P_1h . AM'}.$$

Multiplions cette équation et l'équation (6) membre à membre; il vient

$$\frac{v}{\omega} = \frac{M'h . OP_1 . Ak}{P_1h . AM'}.$$

Tirons Ar parallèlement a $M'P_1$; on a

$$\frac{M'h}{AM'} = \frac{P_1h}{P_1r},$$

et

$$\frac{\rho}{\omega} = \frac{OP_1 . Ak}{P_1r}.$$

Menons la droite Pm parallèle à P_1O et prolongeons Ar jusqu'a sa rencontre avec Pm en u.

Les triangles PAk, APu sont égaux, comme ayant un côté AP commun et les angles PAk, kPA respectivement égaux aux angles APu, PAu ; donc $Ak = Pu$ et

$$\frac{\rho}{\omega} = \frac{OP_1 . Pu}{P_1r}.$$

Les triangles semblables PAu, P_1Ar donnent

$$\frac{Pu}{P_1r} = \frac{AP}{AP_1},$$

et les triangles semblables PAm, P_1AO

$$\frac{AP}{AP_1} = \frac{Pm}{OP_1},$$

d'où, eu égard à ce que $Pm = Am$,

$$\frac{Pu}{P_1r} = \frac{Am}{OP_1};$$

donc

(7) $$\frac{\rho}{\omega} = Am.$$

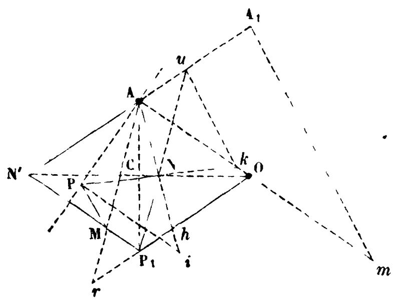
En réunissant les équations (6) et (7), on trouve pour l'appareil Hart

(8) $$\rho = \omega . Am = \Omega . Ak.$$

4. Passons, enfin, au système de M. Kempe, représenté

par la *fig.* 3. La droite décrite par le point P est toujours

Fig. 3.



perpendiculaire à la ligne des centres AO, mais elle passe maintenant par le point fixe A. Posons

$$\mathrm{AN}' = \mathrm{P_1N}' = \mathrm{P_1O} = \mathrm{AO} = l,$$
$$\mathrm{AN} = \mathrm{PN} = \mathrm{P_1N} = l_1, \quad \mathrm{AP} = s,$$
$$\text{angle } \mathrm{AOP_1} = \alpha, \quad \text{angle } \mathrm{ANP_1} = \beta.$$

Le triangle isoscèle ANP donne

$$s = 2\,l_1 \sin\frac{\beta - \alpha}{2} = 2\,l_1\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

D'autre part, on trouve, en considérant les triangles rectangles ACN, ACO,

$$\mathrm{AC} = l_1 \sin\frac{\beta}{2} = l\sin\frac{\alpha}{2},$$

d'où

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{l}{l_1}\sin\frac{\alpha}{2}, \quad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{1 - \frac{l^2}{l_1^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

En portant ces valeurs de $\sin\frac{\beta}{2}$ et $\cos\frac{\beta}{2}$ dans l'expression de s, on obtient, après quelques réductions, la relation cherchée entre s et α pour l'appareil Kempe,

$$(9) \qquad s = l\sin\alpha - 2\,l_1 \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 - \frac{l^2}{l_1^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Pour avoir le rapport de la vitesse du point P à la vitesse angulaire ω de la tige OP_1, mettons l'équation (9) sous la forme

$$l\sin\alpha - s = 2l_1\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\frac{l^2}{l_1^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

et élevons les deux membres au carré; il vient

$$l^2\sin^2\alpha - 2ls.\sin\alpha + s^2 = 4l_1^2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 4l^2\sin^4\frac{\alpha}{2}.$$

Différentions cette équation par rapport au temps t; nous aurons

$$\begin{aligned}&\frac{ds}{dt}(l\sin\alpha - s)\\ &\quad=\frac{d\alpha}{dt}\left(l^2\sin\alpha\cos\alpha - ls\cos\alpha - l_1^2\sin\alpha + 2l^2\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}\right),\end{aligned}$$

ou bien, puisque $\frac{ds}{dt} = v$, $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$,

$$\frac{v}{\omega} = \frac{l\cos\alpha(l\sin\alpha - s) + \sin\alpha\left(2l^2\sin^2\frac{\alpha}{2} - l_1^2\right)}{l\sin\alpha - s},$$

ou enfin, eu égard à l'équation (9),

$$(10)\qquad \frac{v}{\omega} = l\cos\alpha + l_1\cos\frac{\alpha}{2}\,\frac{2\frac{l^2}{l_1^2}\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1}{\sqrt{1-\frac{l^2}{l_1^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

Occupons-nous maintenant de l'expression géométrique des rapports entre les vitesses v, ω et la vitesse angulaire Ω de la tige AN autour du point A; ces trois vitesses sont les seules qu'il y ait lieu de considérer dans l'appareil Kempe, la vitesse angulaire de la tige AN′ autour du point A étant évidemment égale à celle de OP_1 autour de O.

Le point P décrivant la droite AP et le point N la circonférence de rayon AN, le centre instantané relatif au déplacement de la tige PN se trouve au point d'intersection i de la perpendiculaire Pi à AP avec la ligne AN prolongée. Donc, en désignant la vitesse du point N par v',

$$\frac{v}{v'} = \frac{Pi}{Ni},$$

ou, comme $v' = \Omega . AN$,

$$\frac{v}{\Omega} = \frac{Pi . AN}{Ni}.$$

Mais, si l'on prolonge PN jusqu'à la rencontre de k avec AO, on obtient deux triangles isoscèles égaux PNi, ANk, dans lesquels $AN = Ni$, $Pi = Ak$; il vient donc

$$\frac{v}{\Omega} = Ak. \tag{11}$$

Il nous reste à construire le rapport $\frac{v}{\omega}$. A cet effet, considérons le déplacement de la tige NP_1 ; ses deux extrémités se meuvent sur les deux circonférences de rayons AN et OP_1 ; le centre instantané du déplacement considéré se trouve donc au point h et l'on a, en désignant par v'' la vitesse du point P_1,

$$\frac{v'}{v''} = \frac{Nh}{P_1 h}.$$

Or $v' = \Omega . AN$, $v'' = \omega . OP_1$; l'égalité précédente devient

$$\frac{\Omega . AN}{\omega . OP_1} = \frac{Nh}{P_1 h} \quad \text{ou} \quad \frac{\Omega}{\omega} = \frac{Nh . OP_1}{P_1 h . AN}.$$

Multiplions cette équation et l'équation (11) membre à membre; on trouve

$$\frac{v}{\omega} = \frac{Nh . OP_1 . Ak}{P_1 h . AN}.$$

Tirons Ar parallèlement à NP_1; cette droite coupera le prolongement de OP_1 en un point r et l'on aura

$$\frac{Nh}{P_1 h} = \frac{AN}{P_1 r}.$$

Donc

$$\frac{v}{\omega} = \frac{OP_1 . Ak}{P_1 r}.$$

Sur le prolongement de N'A, portons $AA_1 = AN'$; la droite P_1N prolongée rencontrera $N'A_1$ en u; joignons uk et menons la droite $A_1 m$ parallèle à uk; on a

$$\frac{AA_1}{Au} = \frac{Am}{Ak},$$

ou, comme $AA_1 = OP_1$, $Au = P_1 r$,

$$\frac{OP_1}{P_1 r} = \frac{Am}{Ak}, \quad \text{d'où} \quad \frac{OP_1 . Ak}{P_1 r} = Am,$$

et il vient

(12) $$\frac{v}{\omega} = Am.$$

On a donc, d'après les équations (11) et (12), pour l'appareil Kempe, les relations

(13) $$v = \omega . Am = \Omega . Ak.$$