MORET-BLANC

Solution de la question proposée pour l'admission à l'École normale supérieure en 1881

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 114-117

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__114_0>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1881;

PAR M. MORET-BLANC.

On considère la courbe du troisième ordre

$$27y^2 = 4x^3.$$

1° *On demande la condition à laquelle doivent satisfaire les paramètres m et n pour que la droite*

$$y = mx + n$$

soit tangente à cette courbe.

2° *On demande le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe proposée deux tangentes parallèles à deux diamètres conjugués de la conique représentée par l'équation*

$$x^2 + y^2 + 2axy = B.$$

3° *Par un point* A *pris sur la courbe, on mène des sécantes coupant cette courbe en deux points variables* M, M'. *On demande le lieu du milieu des segments* M, M'.

Discuter la forme de ce lieu et indiquer les arcs qui répondent à des sécantes pour lesquelles les points M, M' *sont réels.*

I. Si l'on élimine la variable z entre les deux équations, rendues homogènes,

$$4x^3 = 27y^2z,$$
$$y - mx = nz,$$

l'équation résultant de cette élimination

$$4nx^3 + 27mxy^2 - 27y^3 = 0$$

représente trois droites menées de l'origine aux points d'intersection de la cubique et de la droite. La condition pour que cette droite soit tangente est que deux des valeurs de $\frac{x}{y}$ déduites de l'équation précédente soient égales.

Ceci aura lieu :

1° Pour $n = 0$, quel que soit m, parce que, l'origine étant un point de rebroussement, toute droite qui y passe y rencontre la courbe et deux points coïncidents, sans être une véritable tangente.

2° Si l'on a

$$\left(\frac{9m}{4n}\right)^3 + \left(\frac{27}{8n}\right)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{m^3}{n} + 1 = 0,$$

d'où

$$n = -m^3,$$

qui est la vraie condition.

L'équation générale des tangentes à la courbe est donc

$$y = mx - m^3.$$

II. m' et m'' étant les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués de la conique

$$x^2 + y^2 + 2axy = B,$$

on a la relation

$$m'm'' + a(m' + m'') + 1 = 0.$$

Les coefficients angulaires m, m', m'' des trois tangentes menées d'un point (x, y) du lieu demandé à la courbe donnée, qui est de la troisième classe, étant les racines de l'équation

$$(1) \qquad m^3 - mx + y = 0,$$

on a

$$mm'm'' = -y, \quad m + m' + m'' = 0,$$

d'où

$$m'm'' = -\frac{m}{y}, \quad m' + m'' = -m.$$

Substituant ces valeurs dans la relation

$$m'm'' + a(m' + m'') + 1 = 0,$$

il vient

$$(2) \qquad am^2 - m + y = 0.$$

On aura l'équation du lieu demandé en éliminant m entre les équations (1) et (2). On a successivement

$$m^2 - am - (x - 1) = 0,$$

$$(a^2 - 1)m + a(x - 1) + y = 0,$$

$$m = -\frac{ax + y - a}{a^2 - 1},$$

$$(ax + y - a)^2 + (a^2 - 1)(x + ay - 1) = 0,$$

équation d'une parabole dont la droite $ax + y - a = 0$ est un diamètre et la droite $x + ay - 1 = 0$ la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

III. Soient x_1, y_1 les coordonnées du point A. L'équation d'une sécante issue de ce point est

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Éliminant y entre cette équation et celle de la cubique donnée, on a, pour déterminer les abscisses des points d'intersection, l'équation

$$4x^3 - 27(mx + y_1 - mx_1)^2 = 0,$$

qui, développée et divisée par $x - x_1$, donne

$$4x^2 + (4x_1 - 27m^2)x + 4x_1^2 - 54my_1 + 27m^2x_1 = 0.$$

L'abscisse du point milieu du segment MM' est

$$x = \frac{27m^2 - 4x_1}{8},$$

et l'on obtient l'équation du lieu des points milieux en éliminant m entre cette équation et celle de la sécante, ce qui donne

$$27(y - y_1)^2 = 4(2x + x_1)(x - x_1)^2,$$

ou, en transportant l'origine au point A,

$$27y^2 = 4x^2(2x + 3x_1).$$

La courbe est une cubique de la quatrième classe passant par le point A et par le point de rebroussement de la proposée; elle est symétrique par rapport au nouvel axe des x qu'elle coupe aux points $x = -\frac{3}{2}x_1$ et $x = 0$, en formant une boucle entre ces deux points, et s'étend indéfiniment vers les x positifs en tendant à devenir parallèle à l'axe des y. Elle affecte la forme d'un α.

La séparation des arcs qui correspondent aux sécantes pour lesquelles les points M, M' sont réels ou imaginaires se fait évidemment aux points où M et M' se confondent, c'est-à-dire au point de rebroussement O de la courbe proposée et au point de contact T de la tangente issue du point A.

L'arc OBAT correspond aux points M et M' imaginaires. B est le sommet de la boucle.

Si le point A est le point de rebroussement, la courbe

$$27y^2 = 8x^3$$

est homothétique à la proposée et, comme elle, la développée d'une parabole.

Note. — Solutions analogues de MM. Givelet, de Reims; Henri Cartier, élève du lycée d'Angoulême.