J.-B. POMEY

Solution de la question proposée pour l'admission à l'École polytechnique en 1881

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 111-113

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__111_0>

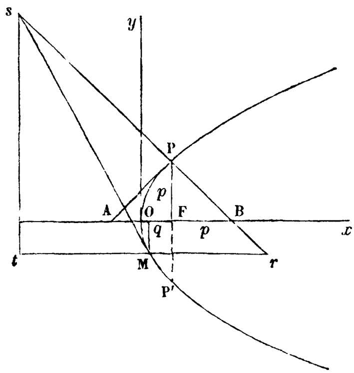
SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1881;

PAR M. J.-B. POMEY,
Élève de l'École Polytechnique.

Une parabole étant donnée, on lui mène une normale en l'un des points P *situés, avec le foyer* F, *sur une même perpendiculaire à l'axe.*

Trouver le lieu des sommets des sections faites par des plans contenant cette normale dans le cylindre dont la parabole donnée est la section droite.

Les points du lieu se trouvent situés sur les génératrices partant de l'arc OP′, P′ étant le symétrique de P. En effet, soit M un point où se projette un point quel-



conque du lieu; l'axe de la parabole-section se projette suivant le diamètre Mr; la tangente au sommet se projette suivant la tangente Ms à la base du cylindre. L'angle SMr est la projection d'un angle droit; donc il doit être obtus; donc M est sur l'arc OP'. Le point du lieu se trouve à l'intersection de la normale en M au plan, avec la sphère décrite sur rs comme diamètre. Cette sphère passe par le point t sur M r. La hauteur du point du lieu étant z au-dessus de la base, son carré z^2 a pour valeur $\mathrm{M}t.\mathrm{M}r$, comme on le voit dans le petit cercle découpé dans la sphère susdite par le plan vertical $t\mathrm{M}r$.

Cela posé, la tangente en $\mathrm{M}(x', y')$ a pour équation

$$y = mx + \frac{p}{2m},$$

en posant

$$m = \frac{p}{y'},$$

car m et y' sont négatifs. La normale PB a pour équation

$$x + y = \frac{3p}{2}.$$

Cherchons l'abscisse du point d'intersection. On a

$$x(1+m) = \frac{3p}{2} - \frac{p}{2m} = \frac{p}{2m}(3m-1),$$

ou

$$x = \frac{p}{2m}\,\frac{3m-1}{1+m}$$

et

$$\mathrm{M}t = x' + (-x),$$

car x est négatif. Donc

$$\mathrm{M}t = x' - \frac{p}{2\frac{p}{y'}}\,\frac{3p-y'}{y'+p} = x' - \frac{y'}{2}\,\frac{3p-y'}{y'+p}.$$

On a

$$\mathrm{M}r = \frac{p}{2} - x' + p - y' = \frac{3p}{2} - x' - y'.$$

Donc, les équations du lieu sont, en supprimant les accents,

$$y^2 = 2px,$$

$$(y+p)z^2 = \left[x(y+p) - \frac{y}{2}(3p-y)\right]\left(\frac{3p}{2} - x - y\right).$$

La projection de la courbe sur le plan yOz a pour équation

$$z^2 = \frac{1}{y+p}.y\left[\frac{y}{2p}(y+p) - \frac{3p-y}{2}\right]\left(\frac{3p}{2} - \frac{y^2}{2p} - y\right),$$

$$z^2 = \frac{y(y-p)}{4p^2(y+p)}(y+3p)(3p^2 - 2py - y^2),$$

$$z^2 = -y\frac{(y-p)^2(y+3p)^2}{4p^2(y+p)};$$

c'est une courbe du cinquième ordre à deux points isolés.

Pour que z soit réel, on voit bien qu'il faut que y et $y+p$ soient de signe contraire, c'est-à-dire que y soit négatif et inférieur à p. On voit que z devient infini pour $y = -p$, c'est-à-dire que la courbe gauche est asymptote à la génératrice P'; elle passe par le sommet (origine). Elle a le point P comme point isolé, ce qui est évident, et le point $y = -3p$, $x = \frac{9p^2}{2p} = \frac{9}{2}p$, où la normale PB rencontre la parabole : c'est lorsque le plan de section devient vertical qu'on obtient ces points. On s'assure que la génératrice O au sommet est une tangente.

Note. — Autres solutions par MM. l'abbé Geneix-Martin et Moret-Blanc.