

ÉDOUARD LUCAS

Sur la déformation du cache-pot

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 9-11

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__9_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA DEFORMATION DU CACHE-POT;

PAR M. EDOUARD LUCAS.

Le cache-pot est formé de fils de fer ou de baguettes rectilignes articulées en chacun de leurs points de rencontre. Il présente la forme générale d'un hyperboloïde à une nappe; les baguettes sont des génératrices rectilignes de chacun des deux systèmes.

M. Cayley a démontré que, si l'on déforme ce modèle d'hyperboloïde, on obtient un hyperboloïde homofocal au premier, en superposant les directions des axes. En effet, soit l'hyperboloïde ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

considérons deux points P et Q de cet hyperboloïde et désignons leurs coordonnées par x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 . Posons

$$\begin{aligned}x_1 &= a\alpha_1, & y_1 &= b\beta_1, & z_1 &= c\gamma_1, \\x_2 &= a\alpha_2, & y_2 &= b\beta_2, & z_2 &= c\gamma_2;\end{aligned}$$

nous aurons les équations

$$(1) \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2 = 1,$$

$$(2) \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 - \gamma_2^2 = 1.$$

De plus, si les deux points P et Q sont sur une même génératrice, en exprimant que le plan tangent en P contient le point Q, on aura

$$(3) \quad \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2 = 1.$$

La distance δ des points P et Q est fournie par l'expression

$$\delta^2 = a^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + b^2(\beta_1^2 - \beta_2^2) + c^2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2).$$

Considérons un second hyperboloïde ayant même centre, mêmes directions d'axes que le premier, et pour longueurs de ses axes des quantités a' , b' , c' telles que

$$a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = c'^2 - c^2 = \lambda.$$

Désignons par P' et Q' les points correspondant à P et Q, c'est-à-dire ayant pour coordonnées

$$\begin{aligned} x'_1 &= a' \alpha_1, & y'_1 &= b' \beta_1, & z'_1 &= c' \gamma_1, \\ x'_2 &= a' \alpha_2, & y'_2 &= b' \beta_2, & z'_2 &= c' \gamma_2. \end{aligned}$$

La relation (3) étant vérifiée, les points P' et Q' appartiennent à la même génératrice; de plus, en désignant par δ' la distance P'Q', nous aurons

$$\delta'^2 = a'^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + b'^2(\beta_1^2 - \beta_2^2) + c'^2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2).$$

Par suite,

$$\frac{\delta'^2 - \delta^2}{\lambda} = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + (\beta_1^2 - \beta_2^2) - (\gamma_1^2 - \gamma_2^2).$$

Mais, en retranchant (2) de (1), on voit que le second membre de la relation précédente est nul; donc P'Q' = PQ.

Donc, si l'on considère sur le premier hyperboloïde un quadrilatère PQRS et sur le second hyperboloïde, obtenu par la déformation du premier, le quadrilatère P'Q'R'S', formé par les points P', Q', R', S' correspon-

dant à P, Q, R, S, ce quadrilatère est tel que

$$P'Q' = PQ, \quad Q'R' = QR, \quad R'S' = RS, \quad S'P' = SP.$$

Il en résulte que tout quadrilatère gauche PQRS peut se déformer sans changer la longueur des côtés suivant le quadrilatère correspondant de l'hyperboloïde homofocal.

C. Q. F. D.
