

E. FAUQUEMBERGUE

Question de licence (Paris, juillet 1880)

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20 (1881), p. 471-473

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__471_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

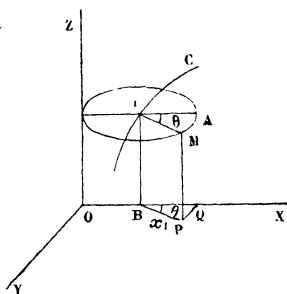
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION DE LICENCE (PARIS, JUILLET 1880);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

Soient OX, OY, OZ trois axes de coordonnées rectangulaires, et dans le plan ZOX une courbe donnée C . Une surface est engendrée par une circonférence de cercle dont le plan reste parallèle au plan XOY , dont le centre décrit la courbe C , et qui rencontre constamment OZ . On demande de former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface, en pre-



nant pour variables la coordonnée z d'un point M et l'angle θ du rayon du cercle qui passe en ce point avec la trace du plan du cercle sur le plan ZOX . Application au cas où la courbe C est une parabole, ayant le point O pour sommet et OX pour axe.

Soient x, y, z les coordonnées du point M : x_1 l'abscisse OB de la projection du centre I ; et $x_1 = \varphi(z)$ l'équation de la courbe C . On a

$$(1) \quad x = x_1(1 + \cos \theta), \quad \text{ou} \quad x = \varphi(z)(1 + \cos \theta),$$

$$(2) \quad y = x_1 \sin \theta, \quad \text{ou} \quad y = \varphi(z) \sin \theta;$$

par suite, l'équation de la surface est

$$(3) \quad \begin{cases} [x - \varphi(z)]^2 + y^2 = \varphi^2(z), \\ \text{ou} \\ x^2 + y^2 - 2x\varphi(z) = 0. \end{cases}$$

On déduit de là

$$p = \frac{dz}{dx} = \frac{x - \varphi(z)}{x\varphi'(z)}$$

$$= \frac{\cos\theta}{1 + \cos\theta} \frac{1}{\varphi'(z)} = \frac{1}{2} \left(1 - \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \frac{1}{\varphi'(z)},$$

$$q = \frac{dz}{dy} = \frac{y}{x\varphi'(z)}$$

$$= \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} \frac{1}{\varphi'(z)} = \tan \frac{\theta}{2} \frac{1}{\varphi'(z)},$$

$$dp = -\frac{1}{2} \frac{1}{\varphi'^2(z) \cos^2 \frac{\theta}{2}} \left[\cos\theta \varphi''(z) dz + \varphi'(z) \tan \frac{\theta}{2} d\theta \right],$$

$$dq = -\frac{1}{2} \frac{1}{\varphi'^2(z) \cos^2 \frac{\theta}{2}} \left[\sin\theta \varphi''(z) dz - \varphi'(z) d\theta \right],$$

$$dx = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left[\cos \frac{\theta}{2} \varphi'(z) dz - \sin \frac{\theta}{2} \varphi(z) d\theta \right],$$

$$dy = \sin\theta \varphi'(z) dz + \varphi(z) \cos\theta d\theta.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation générale des lignes asymptotiques

$$dp dx + dq dy = 0,$$

on aura l'équation demandée :

$$2 \cos \frac{\theta}{2} \left[\cos\theta \varphi''(z) dz + \varphi'(z) \tan \frac{\theta}{2} d\theta \right]$$

$$\times \left[\cos \frac{\theta}{2} \varphi'(z) dz - \sin \frac{\theta}{2} \varphi(z) d\theta \right]$$

$$+ \left[\sin\theta \varphi''(z) dz - \varphi'(z) d\theta \right]$$

$$\times \left[\sin\theta \varphi'(z) dz + \varphi(z) \cos\theta d\theta \right] = 0.$$

ou

$$(4) \quad \sqrt{\frac{\psi''(z)}{\psi'(z)}} dz = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\theta}{\cos \frac{\theta}{2}}.$$

Application. — Dans le cas où la courbe C est une parabole, on a

$$\psi(z) = \frac{z^2}{2\rho},$$

d'où

$$\psi'(z) = \frac{z}{\rho}, \quad \psi''(z) = \frac{1}{\rho}.$$

L'équation (4) devient alors

$$\frac{dz}{z} = \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}},$$

d'où

$$\log z = \log \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4} \right) + \log C$$

et

$$z = C \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4} \right).$$