NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

# Réduction de deux polynômes homogènes du second degré à des sommes de carrés

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 20 (1881), p. 38-48
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__38_1>

# RÉDUCTION DE DEUX POLYNOMES HOMOGÈNES DU SECOND DEGRÉ A DES SOMMES DE CARRÉS;

PAR M. H. LAURENT.

## CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

Soient $f = \Sigma a_{ij} x_i x_j$ et $g = \Sigma b_{ij} x_i x_j$ deux polynômes homogènes du second degré à $n$ variables $x_1, x_2, \ldots x_n$; nous supposons, comme on a l'habitude de le faire, que l'on a entre les constantes $a$, $b$ les relations $a_{ij} = a_{ji}$ et $b_{ij} = b_{ji}$ pour toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$ de $i$ et $j$. Posons

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x_1 = \gamma_{11} y_1 + \gamma_{12} y_2 + \ldots + \gamma_{1n} y_n, \\ x_2 = \gamma_{21} y_1 + \gamma_{22} y_2 + \ldots + \gamma_{2n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \gamma_{1n} y_1 + \gamma_{n2} y_2 + \ldots + \gamma_{nn} y_n, \end{array}\right.$$

les $\gamma$ désignant dans ces formules des coefficients indéterminés et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de nouvelles variables. Les fonctions $f$, $g$ se transformeront en des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ données par les formules

$$f = \Sigma a_{ij}(\gamma_{i1}y_1 + \gamma_{i2}y_2 + \ldots + \gamma_{in}y_n)(\gamma_{j1}y_1 + \ldots + \gamma_{jn}y_n),$$
$$g = \Sigma b_{ij}(\gamma_{i1}y_1 + \gamma_{i1}y_2 + \ldots + \gamma_{in}y_n)(\gamma_{j1}y_1 + \gamma_{jn} \ldots y_n),$$

que l'on peut aussi écrire

$$f = \Sigma a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu}y_\mu y_\nu, \quad g = \Sigma b_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu}y_\mu y_\nu,$$

de sorte que, si l'on pose

$$\Sigma a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu} = 0, \tag{2}$$
$$\Sigma b_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu} = 0, \tag{3}$$
$$\Sigma a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\mu} = A_\mu, \tag{4}$$
$$\Sigma b_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\mu} = B_\mu, \tag{5}$$

$\mu$ et $\nu$ étant supposés fixes sous le signe $\Sigma$, on aura simplement

$$f = A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + \ldots + A_n y_n^2,$$
$$g = B_1 y_1^2 + B_2 y_2^2 + \ldots + B_n y_n^2.$$

Si l'on parvient à résoudre les équations (2) et (3) par rapport aux $\gamma_{ij}$, les fonctions $f$ et $g$ pourront être ramenées à des sommes de carrés au moyen du changement de variables représenté par les équations (1). Pour résoudre ces équations, nous procéderons comme il suit : soient $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la demi-dérivée de $f$ relative à $x_i$, et $g_i$ la demi-dérivée de $g$ relative à la même variable; les équations (2) et (3) peuvent s'écrire respectivement:

$$\gamma_{1\mu}f_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots, \gamma_{n\nu}) + \gamma_{2\mu}f_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots, \gamma_{n\nu}) + \ldots = 0, \tag{2 bis}$$
$$\gamma_{1\mu}g_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots, \gamma_{n\nu}) + \gamma_{2\mu}g_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots, \gamma_{n\nu}) + \ldots = 0; \tag{3 bis}$$

et, comme elles ont lieu pour $\mu = 1, 2, 3, \ldots, n$, il faut en conclure

$$\frac{f_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots)}{g_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots)} = \frac{f_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots)}{g_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots)} = \ldots,$$

pour toutes les valeurs 1, 2, 3, ..., $n$ de $\nu$. Égalons ces rapports à une nouvelle indéterminée $\lambda_\nu$, nous aurons

$$(6) \qquad \begin{cases} f_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots) - \lambda_\nu g_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots) = 0, \\ f_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots) - \lambda_\nu g_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ces équations détermineront les quantités $\gamma$ qui portent le second indice $\nu$. Effaçons, pour simplifier, cet indice; on pourra les écrire comme il suit, en remplaçant $f_1, f_2, \ldots, g_1, g_2, \ldots$ par leurs développements :

$$(7) \qquad \begin{cases} (a_{11} - \lambda b_{11})\gamma_1 \\ \quad + (a_{12} - \lambda b_{12})\gamma_2 + \ldots + (a_{1n} - \lambda b_{1n})\gamma_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (a_{n1} - \lambda b_{n1})\gamma_1 \\ \quad + (a_{n2} - \lambda b_{n2})\gamma_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda b_{nn})\gamma_n = 0. \end{cases}$$

Commençons par éliminer $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$; nous aurons l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré en $\lambda$

$$(8) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & \ldots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} - \lambda b_{11} & a_{n2} - \lambda b_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on appelle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les racines de cette équation et si, dans les formules (7), on remplace successivement $\lambda$ par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, elles feront connaître les valeurs des rapports $\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 : \ldots$; si l'on se donne $B_1, B_2, \ldots, B_n$, les formules (4) achèveront de déterminer les $\gamma_{ij}$.

Multiplions alors la première formule (7) par $\gamma_1$, la seconde par $\gamma_2$, etc., et ajoutons, nous aurons

$$\Sigma a_{ij}\gamma_i\gamma_j = \lambda \Sigma b_{ij}\gamma_i\gamma_j;$$

donc

$$A_\mu = \lambda_\mu B_\mu,$$

de sorte que

(9) $$g = B_1 y_1^2 - B_2 y_2^2 + \ldots + B_n y_n^2,$$

(10) $$f = B_1 \lambda_1 y_1^2 + B_2 \lambda_2 y_2^2 + \ldots + B_n \lambda_n y_n^2;$$

$f$ et $g$ sont ainsi ramenés à des sommes de carrés par une même substitution linéaire.

Mais, pour que les calculs que nous venons d'esquisser conduisent à un résultat admissible, il faut : 1° que l'équation en $\lambda$ ait effectivement $n$ racines; 2° que les équations (7) soient compatibles; 3° que l'on puisse effectivement choisir arbitrairement $B_1, B_2, \ldots$, c'est-à-dire que les $g(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots)$ ne soient pas identiquement nuls; 4° que la substitution (1) soit réversible, c'est-à-dire que les $y$ puissent se calculer en fonction des $x$, c'est-à-dire que les fonctions transformées (9) et (10) soient comme les proposées des fonctions de $n$ variables, ce que nous supposerons; cela revient à admettre que les fonctions $f$ et $g$ ont des discriminants différents de zéro, et nous l'admettrons effectivement jusqu'à nouvel ordre.

### DÉMONSTRATION D'UN LEMME.

*Si l'équation* $\Lambda = 0$ *admet pour racine simple la quantité* $\lambda$, *les mineurs de* $\Lambda$ *ne seront pas tous nuls et la quantite* $g(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ *sera différente de zéro ; si, au contraire, les mineurs de* $\Lambda$ *n'étant pas tous nuls,* $\Lambda = 0$ *admet* $\lambda$ *pour racine double, on aura nécessairement* $g(\gamma_1, \gamma_2, \ldots) = 0$.

D'abord, si les mineurs de $\Lambda$ sont tous nuls, comme

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda} = -\Sigma \frac{d\Lambda}{da_{ij}} b_{ij},$$

$\frac{d\Lambda}{d\lambda}$ sera nul et $\Lambda = 0$ aura $\lambda$ pour racine double au moins.

Si tous les mineurs de $\Lambda$ ne sont pas nuls, on a, en vertu des équations (7),

$$\gamma_p \frac{d\Lambda}{da_{ij}} = \gamma_i \frac{d\Lambda}{da_{pj}},$$

$$\gamma_q \frac{d\Lambda}{da_{ij}} = \gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{pi}},$$

et par suite

$$(12)\qquad \gamma_p\gamma_q\left(\frac{d\Lambda}{da_{ij}}\right)^2 = \gamma_i\gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{pj}}\,\frac{d\Lambda}{da_{qi}} = \gamma_i\gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{pj}}\,\frac{d\Lambda}{da_{iq}}.$$

Or on a, en vertu d'un théorème connu,

$$\Lambda \frac{d^2\Lambda}{da_{pj}\,da_{iq}} = \frac{d\Lambda}{da_{pj}}\,\frac{d\Lambda}{da_{iq}} - \frac{d\Lambda}{da_{pq}}\,\frac{d\Lambda}{da_{ij}},$$

et, comme $\Lambda = 0$,

$$\frac{d\Lambda}{da_{pj}}\,\frac{d\Lambda}{da_{iq}} = \frac{d\Lambda}{da_{pq}}\,\frac{d\Lambda}{da_{ij}}.$$

L'équation (12) devient alors

$$\gamma_p\gamma_q\left(\frac{d\Lambda}{da_{ij}}\right)^2 = \gamma_i\gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{ij}}\,\frac{d\Lambda}{da_{pq}};$$

or, puisque tous les mineurs de $\Lambda$ ne sont pas nuls, on peut supposer $\frac{d\Lambda}{da_{ij}} \gtrless 0$, et alors on a

$$\gamma_p\gamma_q \frac{d\Lambda}{da_{ij}} = \gamma_i\gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{pq}};$$

on en conclut

$$\frac{d\Lambda}{da_{ij}} \sum b_{pq}\gamma_p\gamma_q = \gamma_i\gamma_j \sum \frac{d\Lambda}{da_{pq}}\, b_{pq}$$

ou bien

$$(13)\qquad \frac{d\Lambda}{da_{ij}}\, g = -\gamma_i\gamma_j \frac{d\Lambda}{d\lambda}.$$

Donc $g$ ne s'annule que si $\frac{d\Lambda}{d\lambda}$, $\gamma_i$ ou $\gamma_j$ sont nuls. Donc enfin, si la racine $\lambda$ n'est pas racine double de $\Lambda = 0$, $g$ ne s'annulera que si $\gamma_i$ ou $\gamma_j$ sont nuls. Supposons $\gamma_i = 0$; le système (7) se réduit en supprimant la $j^{\text{ième}}$

ligne à un système de $n-1$ équations homogènes à $n-1$ inconnues dont le déterminant n'est pas nul, car il est égal à $\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}a_{ij}}$. Donc il faut que $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ soient tous nuls, ce qui est absurde, puisque $\Lambda = 0$; donc $\gamma_i$ ne saurait être nul, donc $\gamma_j$ pour la même raison ne l'est pas non plus; donc enfin, si $\lambda$ n'est pas racine multiple de $\Lambda = 0$, $g$ ne saurait être nul.

Ces conclusions tombent en défaut quand tous les mineurs de $\Lambda$ s'annulent. Pour discuter ce cas spécial, imaginons que les coefficients $a_{kl}$ de la fonction $f$ deviennent variables et que, pour des valeurs particulières de ces coefficients, les mineurs de $\Lambda$ s'annulent sans que les mineurs du second ordre passent tous par zéro. Différentions l'équation (13); on aura, en observant que $g$ ne contient pas les $a_{kl}$,

$$g\sum \frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}a_{ij}\,\mathrm{d}a_{kl}}\,\delta a_{kl} = -\gamma_i\gamma_j\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}\,\delta\lambda - \frac{d\Lambda}{d\lambda}\,\delta(\gamma_i\gamma_j).$$

Si $\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}$ n'est pas nul, cette formule devient, en supposant $\frac{d\Lambda}{d\lambda} = 0$,

$$g\sum \frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}a_{ij}\,\mathrm{d}a_{kl}}\,\delta a_{kl} = -\gamma_i\gamma_j\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}\,\delta\lambda. \tag{14}$$

Il est facile de prouver que $\delta\lambda$ n'est pas nul, il en résultera que $g$ ne peut s'annuler que si $\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2} = 0$, c'est-à-dire que si $\lambda$ est racine triple de $\Lambda = 0$. En effet, en différentiant $\Lambda = 0$, on a

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda}\,\delta\lambda + \sum \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}a_{kl}}\,\delta a_{kl} = 0.$$

Comme $\frac{d\Lambda}{d\lambda} = 0$, $\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}a_{kl}} = 0$. Différentions encore; nous aurons

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda}\delta^2\lambda + \frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}\delta\lambda^2 + 2\sum \frac{d}{d\lambda}\,\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}a_{kl}}\delta\lambda\,\delta a_{kl} + \sum \frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}a_{kl}\,\mathrm{d}a_{ij}}\delta a_{kl}\,\delta a_{ij} = 0,$$

formule qui se réduit, dans nos hypothèses, à

$$\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}\delta\lambda^2 + 2\,\delta\lambda\sum \frac{d}{d\lambda}\,\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}a_{kl}}\delta a_{kl} + \sum \frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}a_{kl}\,\mathrm{d}a_{ij}}\delta a_{kl}\,\delta a_{ij} = 0.$$

On voit que $\delta\lambda$ non seulement n'est pas nul, mais en général a deux valeurs si $\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}$ n'est pas nul; quant à $\sum \frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}a_{ij}\,\mathrm{d}a_{kl}}\delta a_{kl}$, il est différent de zéro pour des valeurs convenables des $\delta a_{kl}$, si tous les mineurs du second ordre de $\Lambda$ ne sont pas nuls, comme on l'a supposé.

La formule (14) montre que, si $\Lambda = 0$ a une racine triple sans que tous les mineurs du second ordre de $\Lambda = 0$ soient nuls, $g$ sera nul. Le cas où tous ces mineurs seraient nuls se traitera en différentiant (14) avec la caractéristique $\delta$, et ainsi de suite.

## DISCUSSION DES RÉSULTATS.

Supposons que l'équation $\Lambda$ n'ait que des racines simples finies et différentes de zéro. Les équations (7) donneront pour chaque valeur de $\lambda$ des valeurs bien déterminées de $\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 : \ldots$. Les mineurs de $\Lambda$ n'étant pas tous nuls et $\frac{d\Lambda}{d\lambda}$ étant finis, $B_1, B_2, \ldots$ pourront être choisis différents de zéro, et la substitution (1) aura tous ses coefficients bien déterminés; j'ajoute qu'elle sera réversible, c'est-à-dire que son déterminant $\Gamma$ sera différent de zéro, c'est-à-dire que les $y$ seront des fonctions des $x$. En effet, en vertu de (3 *bis*) et de (4), on a

$$\Gamma \begin{vmatrix} g_1(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1n}) & g_2(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1n}) \cdots \\ g_1(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2n}) & g_2(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2n}) \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} = B_1 B_2 \ldots B_n;$$

mais, $B_1$, $B_2$, ... étant différents de zéro, il faut que $\Gamma$ lui-même soit différent de zéro. C. Q. F. D.

Je suppose que $\lambda$ soit racine double de $\Lambda = 0$. En général, la réduction de $f$ et $g$ à des sommes de carrés ne pourra plus se faire parce que, $g = B$ étant nul, $\Gamma$ l'est aussi; pour parler plus exactement, la réduction à une somme de carrés est encore possible, mais la transformation (1) n'est pas réversible et elle altère la nature des fonctions $f$ et $g$.

Cependant, si tous les mineurs de $\Lambda = 0$ étaient nuls, $g = B$ ne serait plus forcément nul et la transformation, loin de ne plus être possible, pourrait s'effectuer d'une infinité de manières, puisque les équations (7), se réduisant à $n - 2$ distinctes, fourniraient une infinité de systèmes admissibles pour les quantités $\gamma_1 : \gamma_2 : \ldots$. La valeur $\lambda$ double étant connue, on pourra disposer de ces systèmes de manière à satisfaire à (2) et (3).

Si l'équation $\Lambda = 0$ avait une racine triple, la réduction à des sommes de carrés redeviendrait impossible, à moins que tous les mineurs du troisième ordre de $\Lambda$ ne fussent nuls, et ainsi de suite.

Maintenant supposons que l'équation $\Lambda = 0$ ait une racine nulle; $f$ aura son discriminant nul et sera une fonction de $n - 1$ variables seulement, de sorte qu'un carré devra disparaître de l'expression de $f$. C'est ce qui aura lieu par l'application de la méthode expliquée plus haut. Le cas où $\Lambda = 0$ aurait une racine infinie sans avoir de racine nulle pourra être évité en considérant la fonction $g - \lambda f$ à la place de $f - \lambda g$. Enfin le cas où $\Lambda = 0$ aurait à la fois une racine nulle et une racine infinie sera le seul qui échappera à notre méthode; mais, dans ce cas, $f$ et $g$ sont tous deux des fonctions de $n-1$ variables au plus et c'est alors sur ces variables réduites à leur minimum qu'il conviendra d'appliquer la méthode exposée.

En résumé :

*Étant donnés deux polynômes homogènes du second degré $f$ et $g$ à $n$ variables, on pourra toujours les transformer en des sommes de carrés au moyen d'une substitution linéaire réversible, à la condition que le discriminant de $f - \lambda g$, égalé à zéro, n'ait que des racines simples, ou que, s'il a des racines multiples, à chaque racine d'ordre $m$ correspondent des mineurs d'ordre $m-1$, du discriminant de $f - \lambda g$, tous nuls.*

Maintenant considérons les formes réduites de $f$ et $g$, et supposons les coefficients de ces deux fonctions réels; l'équation $\Lambda = 0$ n'aura pas en général toutes ses racines réelles, de sorte que, l'une des formes réduites étant à coefficients réels, l'autre ne sera pas nécessairement à coefficients réels; la substitution (1) elle-même pourra fort bien n'être pas réelle. Il importe cependant de discerner les cas dans lesquels on aura affaire à des substitutions réelles; or la forme particulière de la fonction $\Lambda$ permet de compter *a priori* et assez facilement le nombre des racines réelles de $\Lambda = 0$. On a, en effet,

$$\Lambda \frac{d^2\Lambda}{da_{nn}\,da_{n-1,n-1}} = \frac{d\Lambda}{da_{nn}}\,\frac{d\Lambda}{da_{n-1,n-1}} - \left(\frac{d\Lambda}{da_{n-1,n}}\right)^2,$$

ou, en appelant $\Lambda_1$ ce que devient $\Lambda$ quand on supprime la dernière ligne et la dernière colonne, $\Lambda_2$ ce qu'il devient quand on supprime les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes, etc.,

$$\Lambda\Lambda_2 = \Lambda_1 \frac{d\Lambda}{da_{n-1,n-1}} - \left(\frac{d\Lambda}{da_{n-1,n}}\right)^2.$$

On aurait des relations analogues entre $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$, entre $\Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$, etc., et l'on voit que, si $\Lambda_1$ s'annule, $\Lambda$ et $\Lambda_2$ seront de signes contraires. En général, si $\Lambda_i$ s'annule, $\Lambda_{i+1}$ et $\Lambda_{i-1}$ seront de signes contraires. Cette règle n'est malheureusement pas sans exception, et, $\Lambda_1$ s'annulant si $\frac{d\Lambda}{da_{n,n-1}}$ est nul, on voit que $\Lambda$ ou $\Lambda_2$ s'annulera aussi. Quoi qu'il en soit, les cas où la remarque faite tomberait en défaut seront exceptionnels, et quand $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ seront tels que pour $\lambda = +\infty$ et $-\infty$ ils ne présentent que des variations dans un cas, et que des permanences dans l'autre, $\Lambda = 0$ aura toutes ses racines réelles.

L'équation $\Lambda = 0$ aura toutes ses racines réelles lorsque l'une des fonctions $f$, $g$ sera une somme de carrés tous positifs ou tous négatifs. En effet, les racines de $\Lambda = 0$ ne changent pas par une substitution orthogonale ramenant $f$ seul à une somme de carrés

$$\Lambda_1 x_1^2 + \Lambda_2 x_2^2 + \ldots + \Lambda_n x_n^2.$$

Tous ces carrés étant censés positifs, on peut faire la substitution $x_1 = \frac{y}{\sqrt{\Lambda_1}}$, $x_2 = \frac{y}{\sqrt{\Lambda_2}}$, $\ldots$; alors la substitution qui ramènera à la fois $f$ et $g$ à des sommes de carrés aura pour équation $\Lambda = 0$ une équation de la forme

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle a, comme l'on sait, toutes ses racines réelles.

### INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE.

Pour faire une application géométrique des principes précédents, supposons que $f = 0$ et $g = 0$ représentent deux surfaces du second ordre ; les coefficients de $f$ et $g$ seront supposés réels. Dire que l'on peut ramener $f$ et $g$ à des sommes de carrés par une même substitution linéaire, c'est dire que deux surfaces du second ordre ont un tétraèdre autopolaire commun. Les théorèmes établis plus haut s'interprètent donc ainsi :

*Deux surfaces du second ordre qui ne se touchent pas, car alors on n'a pas à la fois*

$$f = 0, \quad g = 0, \quad \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} \ldots = \lambda,$$

*ont toujours un tétraèdre autopolaire commun.*

*Deux surfaces du second ordre qui se touchent en un seul point n'ont pas de tétraèdre autopolaire commun.*

*Deux surfaces du second ordre qui ont un double contact ont une infinité de tétraèdres autopolaires communs.*

*Deux surfaces circonscrites n'ont pas de tétraèdres autopolaires communs.*