V. JAMET

Sur une classe de surfaces du quatrième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 385-391

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__385_0>

SUR UNE CLASSE DE SURFACES DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. V. JAMET,
Professeur au lycée de Nice [1].

V. Dans tout ce qui va suivre, nous nous appuierons constamment sur le théorème suivant :

Étant données deux courbes qui se coupent, leurs transformées par rayons vecteurs réciproques se coupent sous le même angle.

Comme nous conviendrons d'admettre ce théorème, alors même que nous raisonnerons sur des courbes imaginaires, ou bien encore que nous considérerons le pôle de transformation comme imaginaire, il est bon d'en donner une démonstration analytique. Alors, quand nous énoncerons le théorème, nous ne ferons qu'énoncer le résultat du calcul suivant :

Soit une courbe quelconque. Je peux toujours considérer les trois coordonnées d'un de ses points comme des fonctions de la distance de ce point à un point fixe. Soient a, b, c les coordonnées de ce point fixe, x, y, z les coordonnées d'un point de la courbe. Nous pouvons toujours poser

$$\begin{aligned} x &= a + \varphi(r), \\ y &= b + \chi(r), \\ z &= c + \psi(r), \end{aligned}$$

r désignant la distance des deux points (a, b, c) et (x, y, z). Soit une seconde courbe dont les équations

[1] *Voir* même Tome, p. 344.

sont

$$x = a + \varphi_1(r),$$
$$y = b + \chi_1(r),$$
$$z = c + \psi_1(r).$$

Je suppose que ces deux courbes aient un point commun (x, y, z). Soit V l'angle qu'elles font entre elles en ce point; cet angle satisfait à la relation

$$\cos V = \frac{\varphi'\varphi'_1 + \chi'\chi'_1 + \psi'\psi'_1}{\sqrt{(\varphi'^2 + \chi'^2 + \psi'^2)(\varphi_1'^2 + \chi_1'^2 + \psi_1'^2)}}.$$

Les deux courbes transformées par rapport au point (a, b, c) sont représentées, la première par les équations

$$\xi = a + \frac{k^4}{r^2}\varphi(r),$$
$$\eta = b + \frac{k^4}{r^2}\chi(r),$$
$$\zeta = c + \frac{k^4}{r^2}\psi(r),$$

et la seconde par

$$\xi = a + \frac{k^4}{r^2}\varphi_1(r),$$
$$\eta = b + \frac{k^4}{r^2}\chi_1(r),$$
$$\zeta = c + \frac{k^4}{r^2}\psi_1(r).$$

Ces deux courbes ont un point commun qui est le transformé du point x, y, z et font entre elles, en ce point, un angle V′ donné par la formule

$$\cos V' = \frac{\left(\frac{\varphi'}{r^2} - \frac{2}{r^3}\varphi\right)\left(\frac{\varphi'_1}{r^2} - \frac{2}{r^3}\varphi_1\right) + \left(\frac{\chi'}{r^2} - \frac{2}{r^3}\chi\right)\left(\frac{\chi'_1}{r^2} - \frac{2}{r^3}\chi_1\right) + \ldots}{\sqrt{\left(\frac{\varphi'}{r^2} - \frac{2}{r^3}\varphi\right)^2 + \ldots}\sqrt{\left(\frac{\varphi'_1}{r^2} - \frac{2}{r^3}\varphi_1\right)^2 + \ldots}}$$

ou, en développant,

$$\cos V' = \frac{\frac{1}{r^4}(\varphi'\varphi'_1 + \ldots) - \frac{2}{r^5}\frac{d}{dr}(\varphi\varphi_1 + \ldots) + \frac{4}{r^6}(\varphi\varphi'_1 + \ldots)}{\sqrt{\frac{1}{r^4}(\varphi'^2+\chi'^2+\psi'^2) - \frac{4}{r^5}(\varphi\varphi'+\chi\chi'+\psi\psi') + \frac{4}{r^6}(\varphi^2+\chi^2+\psi^2)}\sqrt{\ldots}}.$$

Mais si, dans les fonctions φ, χ, ψ, φ_1, χ_1, ψ_1, on remplace r par la valeur qui correspond au point commun aux deux courbes, on trouve

$$\varphi = \varphi_1, \quad \chi = \chi_1, \quad \psi = \psi_1$$

et

$$\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2 = \varphi_1^2 + \chi_1^2 + \psi_1^2 = \varphi\varphi_1 + \chi\chi_1 + \psi\psi_1 = r^2,$$

d'où

$$-\frac{2}{r^5}\frac{d}{dr}(\varphi\varphi_1 + \chi\chi_1 + \psi\psi_1) + \frac{4}{r^6}(\varphi\varphi_1 + \chi\chi_1 + \psi\psi_1) = 0,$$

$$-\frac{4}{r^5}(\varphi\varphi' + \chi\chi' + \psi\psi') + \frac{4}{r^6}(\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2)$$
$$= -\frac{2}{r^5}\frac{d}{dr}(r^2) + \frac{4}{r^4} = 0.$$

De même,

$$-\frac{4}{r^5}(\varphi_1\varphi'_1 + \chi_1\chi'_1 + \psi_1\psi'_1) + \frac{4}{r^6}(\varphi_1^2 + \chi_1^2 + \psi_1^2) = 0.$$

La formule précédente se réduit donc à

$$\cos V' = \frac{\varphi'\varphi'_1 + \chi'\chi'_1 + \psi'\psi'_1}{\sqrt{(\varphi'^2 + \chi'^2 + \psi'^2)(\varphi_1'^2 + \chi_1'^2 + \psi_1'^2)}},$$

ce qui démontre le théorème.

Le calcul précédent ne suppose en rien que les quantités qui y figurent soient réelles : nous conviendrons donc de dire que le théorème est vrai, lorsque nous raisonnerons sur des points imaginaires.

Nous admettrons également, et dans tous les cas, les théorèmes suivants, dont la démonstration analytique ne présente pas de difficulté :

A tout plan correspond une sphère passant par le centre de transformation et dont le centre est sur la perpendiculaire menée par le centre de transformation sur ce plan, et réciproquement.

A une sphère quelconque correspond une sphère.

A toute droite correspond une circonférence passant par le centre de transformation, et réciproquement.

A une circonférence quelconque correspond une circonférence.

VI. On peut en déduire immédiatement les propriétés suivantes :

Toutes les sphères passant par l'un des points singuliers d'une girocyclide, et dont le centre se meut sur une droite passant par ce point, coupent la girocyclide suivant des courbes qui font le même angle avec un des cercles générateurs.

Car tous les plans perpendiculaires à la droite fixe coupent le cône transformé suivant des courbes qui font le même angle avec une des génératrices.

Dans toute girocyclide du quatrième ordre, il y a six séries de sections cycliques, différentes des lignes de courbure. Deux sections cycliques d'une même série ne sont pas sur une même sphère, mais ces séries se correspondent deux à deux, de telle sorte que deux sections appartenant à deux séries correspondantes sont sur une même sphère.

Deux sections cycliques appartenant à deux séries correspondantes coupent une même ligne de courbure circulaire sous des angles dont le produit est constant.

Toutes ces propriétés résultent des propriétés des sections cycliques des cônes du second ordre. Néanmoins, il est bon de mettre en évidence, par un procédé plus direct, l'existence des sections cycliques. Considérons, en effet, la girocyclide définie par l'équation

$$[x^2 + y^2 + (z - c)^2 + 2ax + 2by + 2c(z - c)]^2 \\ = 4Ax^2 + 4By^2$$

ou bien

$$[x^2 + y^2 + (z - c)^2]^2 + 4[x^2 + y^2 + (z - c)^2][ax + by + c(z - c)] \\ + 4[ax + by + c(z - c)]^2 = 4Ax^2 + 4By^2.$$

Considérons le cône

$$[ax + by + c(z - c)]^2 - Ax^2 - By^2 = 0.$$

On sait qu'il existe trois valeurs de λ telles qu'on ait identiquement

$$[ax + by + c(z - c)]^2 - Ax^2 - By^2 \\ = [Mx + Ny + P(z - c)][M'x + N'y + P'(z - c)] \\ - \lambda[x^2 + y^2 + (z - c)^2].$$

Ces valeurs sont les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a^2 - A + \lambda & ab & ac \\ ab & b^2 - B + \lambda & bc \\ ac & bc & c^2 + \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

lorsque c est réel, elles sont toutes les trois réelles, et l'une d'elles seulement donne, pour M, N, P, M', N', P', des valeurs réelles.

Dans tous les cas, l'équation de la girocyclide s'écrit

$$[x^2 + y^2 + (z - c)^2]^2 + 4[x^2 + y^2 + (z - c)^2][ax + by + c(z - c)] \\ + 4[Mx + Ny + P(z - c)][M'x + N'y + P'(z - c)] \\ - 4\lambda[x^2 + y^2 + (z - c)^2] = 0,$$

ou bien

$$[x^2 + y^2 + (z - c)^2]\{x^2 + y^2 + (z - c)^2 + 4[ax + by + c(z - c) - \lambda]\} \\ = -4[Mx + Ny + P(z - c)][M'x + N'y + P'(z - c)].$$

Cette dernière équation est le résultat de l'élimination de μ entre les deux équations suivantes

$$(5)\quad x^2+y^2+(z-c)^2=-4\mu[Mx+Ny+P(z-c)]$$

et

$$(6)\quad \begin{cases} x^2+y^2+(z-c)^2+4[ax+by+c(z-c)-\lambda] \\ \quad =\frac{1}{\mu}[M'x+N'y+P'(z-c)], \end{cases}$$

et ces deux dernières équations représentent un cercle dont la position dans l'espace varie en même temps que la valeur de μ. On obtient, en faisant varier μ, une première série de sections cycliques : l'équation (5) montre que les sphères qui passent par une de ces sections et par le point singulier $(0, 0, c)$ ont leurs centres sur une droite fixe passant par ce point et perpendiculaire à l'un des plans cycliques du cône transformé. On obtiendrait une seconde série en faisant varier ν dans les deux équations suivantes

$$x^2+y^2+(z-c)^2=-4\nu[M'x+N'y+P'(z-c)]$$

et

$$x^2+y^2+(z-c)^2+4[ax+by+c(z-c)-\lambda]$$
$$=\frac{1}{\nu}[Mx+Ny+P(z-c)].$$

Cherchons maintenant l'enveloppe des plans cycliques d'une même série. Le plan de la courbe représentée par les équations (5) et (6) a lui-même pour équation

$$4[ax+by+c(z-c)-\lambda]$$
$$=4\mu[Mx+Ny+P(z-c)]+\frac{1}{\mu}[M'x+N'y+P'(z-c)],$$

et si l'on pose, pour abréger,

$$\begin{aligned} ax+by+c(z-c)-\lambda&=H,\\ Mx+Ny+P(z-c)&=K,\\ M'x+N'y+P'(z-c)&=L. \end{aligned}$$

cette équation devient

$$4K\mu^2 - 4H\mu + L = 0.$$

L'enveloppe de ce plan a pour équation

$$H^2 - KL = 0,$$

c'est donc un cône du deuxième ordre.

(*A suivre.*)