NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. JABLONSKI

Note sur les limites et les nombres incommensurables

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 241-250

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__241_0>

NOTE SUR LES LIMITES ET LES NOMBRES INCOMMENSURABLES;

PAR M. E. JABLONSKI,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Besançon.

Dans la plupart des définitions ou des démonstrations reposant sur la notion de limite, on est obligé de former des suites de nombres constamment croissants ou constamment décroissants, et il en résulte des difficultés ou des longueurs que l'on peut éviter au moyen d'un théorème plus général que celui sur lequel on s'appuie ordinairement.

Je vais établir ce théorème en reprenant la suite des propositions qui y conduisent.

THÉORÈME I. — *Lorsque deux variables sont constamment égales, si l'une tend vers une limite, l'autre tend vers la même limite.*

THÉORÈME II. — *Lorsque la différence de deux variables tend vers zéro en même temps que l'une d'elles tend vers une limite, l'autre tend vers la même limite.*

Soient u et v deux variables, et $u - v = \alpha$; supposons que v tende vers l et α vers zéro. On a

$$v = l + \beta,$$

β tendant vers zéro; donc

$$u = l + \alpha + \beta.$$

α et β tendant vers zéro en même temps, il en est de même de leur somme; donc u tend vers l.

THÉORÈME III. — *Lorsqu'une variable constamment* *croissante est assujettie à rester moindre qu'un nombre fini déterminé, elle tend vers une limite inférieure ou égale à ce nombre. De même, lorsqu'une variable constamment décroissante est assujettie à rester supérieure à un nombre déterminé, elle tend vers une limite supérieure ou égale à ce nombre.*

C'est à ce théorème bien connu que je me propose de substituer un théorème plus général.

Théorème IV. — *Soit u une variable assujettie à prendre, dans l'ordre des indices, les valeurs formant la suite indéfinie*

$$(1) \qquad a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p,\ \ldots,\ a_q,\ \ldots,\ a_r,\ \ldots,$$

toutes moindres qu'un nombre A; *si dans cette suite, que je ne suppose pas constamment croissante, on peut prendre une suite de nombres constamment croissants*

$$(2) \qquad a_0,\ a_2,\ \ldots,\ a_p,\ \ldots,\ a_r,\ \ldots,$$

et tels que la différence entre ces nombres et ceux d'indices intermédiaires de la première suite tende vers zéro lorsque les indices croissent indéfiniment, la variable u tend vers une limite inférieure ou égale à A.

En effet, soit v une variable assujettie à prendre seulement les valeurs de la suite (2) dans l'ordre des indices; en vertu du théorème III, elle tend vers une limite inférieure ou égale à A. On peut imaginer que, lorsque v passe de a_p à a_r, u passe par toutes les valeurs d'indices intermédiaires depuis a_p jusqu'à a_r; il en résulte que la différence $u - v$ est ou rigoureusement nulle ou tend vers zéro lorsque les indices croissent indéfiniment, et par suite que v tend vers la même limite que u (théorèmes I et II).

Théorème V. — *Lorsque deux suites indéfinies de* *nombres,*

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p, a_q, a_r, \ldots, a_n, \ldots,$$
$$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_p, b_q, b_r, \ldots, b_n, \ldots,$$

sont telles que l'un quelconque des nombres de la première soit moindre que l'un quelconque des nombres de la seconde, et que la différence $b_n - a_n$ entre deux termes correspondants tende vers zéro lorsque n croît indéfiniment, les deux suites tendent vers une limite commune.

La différence $b_n - a_n$ tendant vers zéro, il suffit de prouver que la première suite tend vers une limite.

Soit a_p un nombre de la première suite. Supposons d'abord qu'il soit plus grand que tous ceux qui le précèdent et qui le suivent. On a, par hypothèse, quelque grand que soit n,

$$a_n < a_p < b_n.$$

Or $b_n - a_n$ tend vers zéro; donc a_n et b_n tendent vers a_p, et le théorème est démontré. Sinon, on peut trouver, parmi ceux qui suivent a_p, un nombre $a_r > a_p$. En répétant le même raisonnement sur a_r, et ainsi de suite, on voit que, si aucun des nombres de la première suite n'est la limite commune, on peut, dans cette suite, former une suite de nombres constamment croissants.

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_p, a_r, \ldots, a_m, \ldots, a_{m'}, \ldots$ cette suite, et a_n un nombre d'indice intermédiaire entre m et m', et qui par suite est moindre que $a_{m'}$. On a

$$a_{m'} - a_n < b_n - a_n,$$

puisque, par hypothèse,

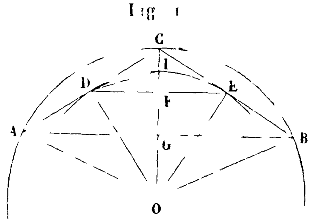
$$a_{m'} < b_n;$$

donc $a_{m'} - a_n$ tend vers zéro lorsque les indices croissent indéfiniment. Les conditions énoncées dans le théorème IV étant satisfaites, la première suite tend vers une limite, ce qu'il fallait démontrer.

Première application. — *Longueur d'une circonférence.* — Inscrivons dans une circonférence une suite de polygones convexes quelconques dont le nombre des côtés croisse indéfiniment d'une manière quelconque, pourvu que tous les côtés tendent vers zéro. Soit DE... un de ces polygones; par les sommets, menons des tangentes à la circonférence : elles forment le polygone convexe circonscrit ACB.... Nous aurons ainsi deux suites de polygones qui se correspondent deux à deux.

Soient a_n le périmètre de l'un des polygones inscrits, b_n celui du polygone circonscrit correspondant. Si l'on fait croître n d'une manière quelconque, on obtient deux

Fig. 1



suites indéfinies. Le périmètre de l'un quelconque des polygones inscrits est évidemment moindre que celui de l'un quelconque des polygones circonscrits; de plus, la différence $b_n - a_n$ tend vers zéro. En effet, on a (*fig.* 1)

$$\frac{DC}{DF} = \frac{OC}{OD},$$

d'où

$$\frac{DC - DF}{DF} = \frac{IC}{OD},$$

$$DC - DF = \frac{IC.DF}{OD}.$$

$b_n - a_n$ se compose de la somme des différences telles que DC — DF ; donc

$$b_n - a_n = \Sigma(\mathrm{DC} - \mathrm{DF}) = \frac{1}{\mathrm{OD}} \Sigma \mathrm{IC.DF}.$$

Soit α la plus grande des flèches IC; on a

$$\Sigma \mathrm{IC.DF} < \alpha \Sigma \mathrm{DF} \quad \text{ou} \quad \Sigma \mathrm{IC.DF} < \alpha a_n;$$

donc

$$b_n - a_n < \frac{a_n}{\mathrm{OD}} \alpha.$$

a_n conserve une valeur finie, et, toutes les flèches tendant vers zéro, il en est de même de α; donc $b_n - a_n$ tend vers zéro.

Il en résulte que, quelle que soit la loi d'inscription, les périmètres des polygones convexes inscrits et circonscrits, réguliers ou non, tendent vers une limite commune, qui est, par définition, la longueur de la circonférence considérée.

Un procédé tout semblable permet de définir la longueur d'un arc convexe d'une courbe quelconque.

Deuxième application. — *Définition de* $\sqrt{2}$. — Soient m et n deux nombres entiers, tels que

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 < 2 < \left(\frac{m+1}{n}\right)^2,$$

ce que l'on peut toujours faire.

A chaque valeur de n correspond une valeur de m et une seule.

Faisons croître *n d'une manière quelconque,* et soient

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{m'}{n'}, \quad \ldots,$$

$$\frac{m+1}{n}, \quad \frac{m'+1}{n'}, \quad \ldots$$

les deux suites indéfinies ainsi obtenues. Un quelconque des nombres de la première a un carré moindre que celui de l'un quelconque des nombres de la seconde; donc l'un quelconque des nombres de la première est moindre que l'un quelconque des nombres de la seconde. D'ailleurs, la différence $\frac{1}{n}$ de deux termes correspondants tend vers zéro; donc les deux suites tendent vers une limite commune, qui est, par définition, la valeur arithmétique de $\sqrt{2}$.

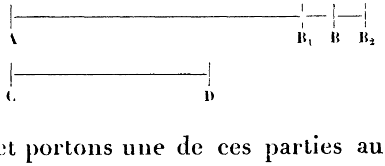
Les nombres $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ sont les valeurs de $\sqrt{2}$ à $\frac{1}{n}$ près, par défaut ou par excès.

Troisième application. — *Définition des nombres incommensurables et des opérations faites sur ces nombres.* — Pour définir le rapport de deux grandeurs, on imagine d'abord que ces grandeurs ont une commune mesure; le rapport est alors le nombre fractionnaire ordinaire dont les termes sont les nombres entiers qui expriment combien de fois chacune des grandeurs contient la commune mesure.

Cette définition ne subsiste plus lorsque les deux grandeurs n'ont pas de commune mesure : il faut lui substituer une autre définition, reposant sur la notion de limite.

Pour fixer les idées, soient deux longueurs AB et CD, qui n'ont pas de commune mesure. Divisons CD en n par-

Fig. 2.



ties égales, et portons une de ces parties autant de fois que possible sur AB à partir de A; supposons que l'on puisse la porter m fois et qu'on obtienne ainsi le point B_1: en la portant une fois de plus, on dépassera B et on obtiendra le point B_2. Quelque grand que soit n, on ne tombera jamais au point B, et, en faisant croître indéfiniment ce nombre, on obtiendra deux suites de longueurs telles que AB_1 et AB_2, les unes toutes moindres que AB, les autres toutes supérieures à AB et tendant évidemment vers AB.

Les rapports de AB_1 et AB_2 à CD sont respectivement $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, lorsque n croît indéfiniment; on a ainsi deux suites illimitées de nombres. Tous ceux de la première mesurant des longueurs moindres que AB et ceux de la seconde des longueurs supérieures à AB, un quelconque des nombres de la première est moindre que l'un quelconque des nombres de la seconde; d'ailleurs la différence $\frac{1}{n}$ entre deux termes correspondants tend vers zéro : donc ces deux suites, c'est-à-dire $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, tendent vers une limite commune qui est, par définition, le rapport de AB à CD.

Cette définition n'exige pas que toutes les longueurs AB_1 soient croissantes, ni que toutes les longueurs AB_2 soient décroissantes; n peut croître d'une manière absolument quelconque sans que la limite soit changée.

De la même manière on peut définir les opérations sur les nombres incommensurables.

Addition. — Soit à définir $a+b$, a et b étant des nombres incommensurables.

Soient $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ les nombres qui tendent vers a, comme il résulte de la définition précédente; $\frac{m_1}{n_1}$ et $\frac{m_1+1}{n_1}$ ceux qui tendent vers b.

Formons

$$\frac{m}{n} + \frac{m_1}{n_1} \quad \text{et} \quad \frac{m+1}{n} + \frac{m_1+1}{n_1}.$$

Si l'on fait croître n et n_1 d'une manière quelconque, on obtient deux suites indéfinies de pareilles sommes dont le sens est bien défini, puisque les termes en sont commensurables. L'un quelconque des nombres $\frac{m}{n}$ étant moindre que l'un quelconque de la suite $\frac{m+1}{n}$, et de même pour $\frac{m_1}{n_1}$, on voit que $\frac{m}{n} + \frac{m_1}{n_1}$ sera moindre que l'une quelconque des sommes telles que $\frac{m+1}{n} + \frac{m_1+1}{n_1}$; d'ailleurs, la différence entre deux sommes correspondantes est $\frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, qui tend vers zéro; donc ces deux sommes tendent vers une limite commune, qui est, par définition, la valeur de $a + b$.

Soustraction. — Il s'agit de définir $a - b$.

Soient $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ les nombres commensurables qui tendent vers a; $\frac{m_1}{n_1}$ et $\frac{m_1+1}{n_1}$ ceux qui tendent vers b.

Supposons $a > b$; on peut imaginer que n et n_1 soient assez grands pour que l'on ait aussi $\frac{m}{n} > \frac{m_1+1}{n_1}$, et par suite $\frac{m+1}{n} > \frac{m_1}{n_1}$. Formons les deux différences

$$\frac{m}{n} - \frac{m_1+1}{n_1} \quad \text{et} \quad \frac{m+1}{n} - \frac{m_1}{n_1}.$$

On voit sans peine que, si l'on forme les deux suites en faisant croître n et n_1, un quelconque des nombres de la première est moindre que l'un quelconque des nombres de la seconde; d'ailleurs, la différence $\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}$ tend vers zéro : donc ces deux différences tendent vers une limite commune, qui est, par définition, la valeur de $a - b$.

On procède de même pour toutes les autres opérations; il est d'ailleurs facile de définir, en général, une expression telle que $f(x, y, z, \ldots)$, pour des valeurs incommensurables des lettres qui y entrent. Supposons que cette expression reste finie et continue lorsque x, y, z, ... ont des valeurs commensurables comprises dans de certains intervalles, et soient a, b, c, ... des nombres incommensurables compris dans ces mêmes intervalles.

Imaginons que l'on remplace successivement x par $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, ou inversement, suivant que f croît ou décroît en valeur absolue lorsque x croît, et de même pour y, z, ...; on formera de la sorte deux expressions dont les valeurs seront bien définies, puisqu'elles dépendront de nombres commensurables. Par le même raisonnement, basé sur le théorème général, on prouve que les valeurs numériques ainsi obtenues tendent vers une limite commune, qui est, par définition, la valeur de $f(a, b, c, \ldots)$.

Il y a plus : toute relation

$$f(x, y, z, \ldots) = \varphi(x, y, z, \ldots),$$

vraie pour toutes les valeurs de x, y, z, ... commensurables prises dans de certains intervalles, subsiste si l'on y remplace x, y, z, ... par des nombres incommensurables a, b, c, ... compris dans les mêmes intervalles.

En effet, si l'on fait dans φ les mêmes substitutions que dans f, on obtient des nombres f' et φ', f'' et φ'', or on a, par hypothèse,

$$f' = \varphi', \quad f'' = \varphi'';$$

donc les limites sont aussi égales, et, par suite,

$$f(a, b, c, \ldots) = \varphi(a, b, c, \ldots).$$

Ainsi, par exemple :

Dans un polynôme à termes incommensurables, on peut à volonté intervertir l'ordre des termes.

Dans un produit de facteurs incommensurables, on peut à volonté intervertir l'ordre des facteurs.

Enfin les règles d'opérations algébriques effectuées sur des expressions quelconques peuvent se traduire par une ou plusieurs égalités, vraies pour toutes les valeurs commensurables des lettres qui y entrent, au moins dans de certains intervalles; on peut conclure de ce qui précède que ces règles subsistent dans toute leur généralité pour des valeurs incommensurables de ces mêmes lettres et dans les mêmes intervalles.