Nouvelles annales de mathématiques

Escary

Sur la résolution d'un système particulier de deux équations simultanées du degré m à deux inconnues

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 227-229

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__227_1>

SUR LA RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME PARTICULIER DE DEUX ÉQUATIONS SIMULTANÉES DU DEGRÉ m A DEUX INCONNUES;

PAR M. ESCARY.

Le système des deux équations simultanées du degré m,

$$ax^m + by^m = \frac{a}{x^m} + \frac{b}{y^m} = c, \tag{1}$$

se résout d'une manière très élégante en introduisant, comme l'a fait M. Lannes dans la question du Concours général de 1879 [1], les angles du triangle construit avec les coefficients a, b, c comme côtés, en supposant cette construction possible. En effet, en rendant ces équations homogènes, elles s'écrivent

$$\left\{\begin{aligned} & ax^m + by^m = cz^m, \\ & \frac{a}{x^m} + \frac{b}{y^m} = \frac{c}{z^m}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Si l'on pose $\frac{y}{z} = \alpha$, $\frac{z}{x} = \beta$, $\frac{x}{y} = \gamma$, et qu'on multiplie les équations (2) membre à membre, on a, en rendant le résultat entier,

$$ab\gamma^{2m} + (a^2 + b^2 - c^2)\gamma^m + ab = 0,$$

---

[1] *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XIX, p. 508.

d'où l'on tire

$$\gamma^m = \frac{c^2 - a^2 - b^2 \pm \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2}}{2ab}.$$

Or, si l'on désigne par S la surface du triangle dont les côtés sont a, b, c, on voit que le radical a pour valeur $4S\sqrt{-1}$. En observant encore que l'on a

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$
$$2S = ab\sin C,$$

on a enfin

$$\gamma^m = -\cos C \pm \sqrt{-1}\sin C,$$

d'où

$$\gamma = \cos\frac{C + (2K+1)\pi}{m} \mp \sqrt{-1}\sin\frac{C + (2K+1)\pi}{m},$$

où l'on doit attribuer à K les valeurs $0, 1, 2, \ldots, m-1$.

On trouve de la même manière

$$\alpha = \cos\frac{A + 2K\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{A + 2K\pi}{m},$$

$$\beta = \cos\frac{B + 2K\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{B + 2K\pi}{m}.$$

Si maintenant l'on fait, dans les équations (2), $z = 1$, on retombe dans les équations (1), et des valeurs précédentes de α et de β on tire celles de x et de y, savoir

$$x = \cos\frac{B + 2K\pi}{m} \mp \sqrt{-1}\sin\frac{B + 2K\pi}{m},$$

$$y = \cos\frac{A + 2K\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{A + 2K\pi}{m}.$$

Ce sont les $2m$ systèmes de solutions des équations proposées (1).

Il nous a paru intéressant de présenter ici cette résolution du système des équations (1), à cause de l'analogie que l'on observe, grâce à la représentation géométrique de M. Lannes, entre ses solutions et celles des équations trinômes, dans le cas des racines imaginaires, car on sait que ces dernières racines conduisent alors, en les interprétant géométriquement, à l'élégant théorème de Cotes.