

ÉDOUARD LUCAS

**Sur un théorème d'Euler concernant
la décomposition d'un nombre en
quatre cubes positifs**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 89-91

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__89_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR UN THÉORÈME D'EULER CONCERNANT LA DÉCOMPOSITION
D'UN NOMBRE EN QUATRE CUBES POSITIFS;**

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Euler a démontré qu'un nombre positif quelconque, entier ou fractionnaire, est égal à la somme de quatre cubes positifs, entiers ou fractionnaires. On trouve la formule correspondante dans une Note qui termine les *Exercices d'analyse numérique* de Lebesgue. Nous ferons d'abord observer que Lebesgue ne paraît pas avoir deviné la méthode qui a dû servir à Euler pour obtenir cette formule. En effet, il nous paraît évident que celle-ci provient des recherches entreprises par Euler pour la résolution de l'équation indéterminée

$$(1) \quad x^3 + y^3 = Az^3.$$

L'identité d'Euler est la suivante,

$$n = \left(\frac{n}{6m^2}\right)^3 [(2-a)^3 + a^3(b-1)^3 + b^3(c-1)^3 + c^3],$$

dans laquelle on suppose m tel que l'on ait

$$\frac{n}{12} < m^3 < \frac{n}{6},$$

et, de plus,

$$a = 1 + \frac{6m^3}{n}, \quad b = \frac{2a^3 - 1}{a^3 + 1}, \quad c = \frac{2b^3 - 1}{b^3 + 1}.$$

Il est fort probable que cette identité provient de l'A-

rithmétique et non de l'Algèbre, contrairement à la supposition de Lebesgue. En partant des formules qui peuvent servir à la résolution de l'équation (1), on obtient le théorème suivant, dont la première partie complète le théorème d'Euler :

THÉORÈME. — *Un nombre positif quelconque, entier ou fractionnaire, est, d'une infinité de manières, le produit ou le quotient de deux nombres formés de la somme de deux cubes positifs.*

En d'autres termes, on peut résoudre d'une infinité de manières, et en nombres rationnels, les deux équations

$$(2) \quad N = (x^3 + y^3) \times (z^3 + u^3),$$

et

$$(3) \quad N = (x^3 + y^3) : (z^3 + u^3),$$

N désignant un nombre quelconque.

Parmi les formules en nombre infini qui permettent de résoudre les équations (2) et (3), nous donnerons les deux suivantes, qui fournissent elles-mêmes des solutions en nombre infini.

Pour l'équation (3), on pose $N = 2^\lambda 3^\mu \frac{A}{B}$: on choisit $\frac{a}{b}$ par les conditions d'inégalité

$$\frac{B}{2^\lambda 3^{\mu-2} A} > \frac{a^3}{b^3} > \frac{B}{2^\lambda 3^{\mu-1} A},$$

et l'on a

$$x = \frac{B b^3}{a}, \quad y = \frac{2^\lambda 3^{\mu-1} A a^3 - B b^3}{a},$$

$$z = \frac{B b^3 - 2^\lambda 3^{\mu-1} A a^3}{b}, \quad u = \frac{2^\lambda 3^{\mu-2} A a^3}{b}.$$

Pour l'équation (2), qui correspond au théorème

d'Euler, nous remarquerons que l'on a les deux identités

$$\begin{aligned} (6LM + L^2 - 3M^2)^3 + (6LM - L^2 + 3M^2)^3 \\ = 2^2 \cdot 3^2 LM (L^2 + 3M^2)^2, \\ (L + M)^3 + (L - M)^3 = 2L(L^2 + 3M^2). \end{aligned}$$

Donc, en multipliant membre à membre, et divisant les deux membres de l'égalité obtenue par $(L^2 + 3M^2)^3$, on aura décomposé $2^3 \cdot 3^2 L^2 M$ en un produit de deux facteurs égaux à une somme de deux cubes; en supposant, de plus,

$$L = B b^3, \quad M = 2^{\lambda-3} 3^{\mu-2} A a^3,$$

on aura ainsi décomposé en ce produit le nombre

$$N = 2^\lambda \cdot 3^\mu AB^2;$$

on déterminera d'ailleurs le nombre $\frac{a^3}{b^3}$ de telle sorte qu'il rende positifs tous les cubes considérés.