G. DE LONGCHAMPS

Théorème d'algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 71-73

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__71_1>

THÉORÈME D'ALGÈBRE;

PAR M. G. DE LONGCHAMPS.

THÉORÈME. — *Si l'on désigne par* A_0, A_1, ..., A_{p-1} *les* p *premiers coefficients d'une équation, coefficients supposés positifs, et par* N *et* N′ *les deux coefficients négatifs les plus élevés, le nombre*

$$Z = 1 + \frac{N + N'}{2A_0 + 2A_1 + \ldots + 2A_{p-2} + A_{p-1}}$$

est une limite supérieure des racines positives de l'équation.

Nous rappellerons d'abord une règle très simple pour trouver une limite supérieure des racines positives. Cette règle, qui est *une règle de Maclaurin perfectionnée,* mais plus commode et souvent plus puissante que celle qu'on désigne communément ainsi, est due à M. Laguerre. Elle s'énonce ainsi : *Si* N *désigne la valeur absolue du plus grand coefficient négatif et* $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$ *les coefficients positifs qui précèdent le premier coefficient négatif,*

$$1 + \frac{N}{A_0 + A_1 + \ldots + A_{p-1}}$$

est une limite supérieure des racines positives de l'équation.

Cela admis, posons

$$\begin{aligned} 0 = f(x) = {} & A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots \\ & + A_{p-1} x^{m-p+1} - A_p x^{m-p} + \ldots + A_m, \end{aligned}$$

et remarquons que l'équation

$$\varphi(x) = (x+1) f(x) = 0$$

aura les mêmes racines positives que la proposée. Or

$$\begin{aligned} \varphi(x) = {} & A_0 x^{m+1} + (A_1 + A_0) x^m + \ldots \\ & + (A_{p-1} + A_{p-2}) x^{m-p} + \ldots, \end{aligned}$$

et le plus grand coefficient négatif de φ est, dans le cas le plus défavorable qu'on puisse imaginer, $N + N'$, N et N' désignant les deux plus grands coefficients négatifs de f. Appliquons à l'équation φ la règle de M. Laguerre : le nombre

$$1 + \frac{N + N'}{2A_0 + 2A_1 + \ldots + 2A_{p-2} + A_{p-1}}$$

sera une limite supérieure des racines positives de l'équation φ, et par suite de l'équation f.

Exemple. — Considérons l'équation

$$f = x^5 + q^2 x^4 + q x^3 - q^2 x^2 - x - 1 = 0,$$

dans laquelle nous supposerons $q = 100$, pour fixer les idées.

La règle de Maclaurin ordinaire donne une limite égale à

$$q^3 + 1 = 1000001;$$

la règle de Maclaurin perfectionnée,

$$q + 1 = 101;$$

celle de M. Laguerre,

$$1 + \frac{q^3}{q^2 + q + 1} = \frac{q^3 + q^2 + q + 1}{q^2 + q + 1} = q + \frac{1}{q^2 + q + 1},$$

c'est-à-dire $q + 1$, comme la précédente; enfin celle que nous proposons,

$$1 + \frac{q^3 + 1}{2q^2 + q + 2} = \frac{q^3 + 2q^2 + q + 3}{2q^2 + q + 2},$$

ou, en prenant le nombre entier supérieur,

$$\frac{q}{2} + 1 = 51.$$

Remarque. — L'exemple que nous avons choisi est un de ceux où notre méthode perfectionne la règle de M. Laguerre; mais il n'en est pas nécessairement et toujours ainsi. Par exemple, si $N = N'$, ce qui est, il est vrai, le cas le plus défavorable à notre règle, on reconnaît sans peine que celle-ci est en infériorité. Il y a supériorité toutes les fois que l'inégalité

$$\frac{N}{A_0 + \ldots + A_{p-1}} > \frac{N'}{A_0 + \ldots + A_{p-2}}$$

est satisfaite.