Nouvelles annales de mathématiques

WEILL

Théorème sur les polygones inscrits et circonscrits à la fois à deux circonférences

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 57-59

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__57_1>

THÉORÈME SUR LES POLYGONES INSCRITS ET CIRCONSCRITS A LA FOIS A DEUX CIRCONFÉRENCES;

PAR M. WEILL.

THÉORÈME. — *Lorsqu'un polygone convexe se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux circonférences, sa surface reste proportionnelle à celle du polygone ayant pour sommets les points de contact des côtés du premier avec la circonférence intérieure.*

Lorsque le polygone ABC... se déplace en restant inscrit à une circonférence fixe et circonscrit à une seconde circonférence fixe ayant O pour centre et R pour rayon, les points de contact a, b, c, ... de ses côtés avec la circonférence O sont les sommets d'un polygone dont les côtés sont tangents à une ellipse ayant le point O pour foyer. Soit F le deuxième foyer de cette ellipse. Joignons le point O à deux sommets consécutifs A et B du polygone; ces deux droites rencontrent respectivement en K et L les côtés ab, bc du polygone des points de contact.

Abaissons du point F les perpendiculaires FN, FM sur ab, bc. Les produits $\mathrm{OK} \times \mathrm{OA}$ et $\mathrm{OK} \times \mathrm{FN}$ restent constants pendant le déplacement du polygone. Donc le rapport $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{FN}}$ est constant, et le polygone des points M, N, ... est homothétique du polygone ABC....

Le théorème énoncé sera démontré, si nous prouvons que le rapport des surfaces des polygones NM... et abc... est constant. Cela revient à démontrer que le rapport entre la somme des triangles FNM et la somme des triangles NbM est constant.

Désignons par R′ la distance constante du point F au côté NM, et par α l'angle de la droite fixe OF avec la droite Ob. Nous aurons

$$\text{surface FMN} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{NM}.\mathrm{R}',$$

$$\begin{aligned}\text{surface N}b\text{M} &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{NM}(\mathrm{R} - \mathrm{R}' - \mathrm{OF}.\cos\alpha)\\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{NM}(\mathrm{R} - \mathrm{R}') - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{OF}.\mathrm{NM}.\cos\alpha,\end{aligned}$$

$$\text{surface }(\mathrm{MN}\ldots) = \frac{\mathrm{R}'}{2}\,\Sigma\mathrm{NM},$$

$$\text{surface }(\mathrm{N}b\mathrm{M} + \mathrm{M}c\mathrm{S} + \ldots) = \frac{\mathrm{R} - \mathrm{R}'}{2}\,\Sigma\mathrm{NM} - \frac{\mathrm{OF}}{2}\,\Sigma\mathrm{NM}.\cos\alpha.$$

Or l'expression $\Sigma\mathrm{NM}.\cos\alpha$ est égale à zéro; donc le

rapport des deux surfaces considérées est égal à $\frac{R'}{R - R'}$.
On en déduit que le rapport des surfaces des deux polygones (NM...) et (*abc*...) est égal à $\frac{R'}{R}$.

Or, le rapport des surfaces des polygones (NM...) et (ABC...) est égal à $\frac{R'^2}{R^2}$. Donc enfin, le rapport des surfaces des deux polygones (*abc*...) et (ABC...) est égal à $\frac{R'}{R}$.

On peut remarquer que la surface du polygone (*abc*...) est moyenne proportionnelle entre celle du polygone (ABC...) et celle du polygone (NM...).

Dans le cas particulier du triangle, le rapport des surfaces est égal au rapport entre le rayon du cercle inscrit et le diamètre du cercle circonscrit. On en déduit les deux théorèmes suivants :

Théorème. — *La surface d'un triangle est moyenne proportionnelle entre celle du triangle ayant pour sommets les centres des cercles exinscrits et celle du triangle ayant pour sommets les points de contact du cercle inscrit au premier avec ses côtés.*

Théorème. — *Étant donné un triangle* T, *on considère le triangle* T_1, *dont les sommets sont les points de contact des côtés du premier avec le cercle inscrit, et le triangle* T_2, *dont les sommets sont les pieds des hauteurs du deuxième ; on opère sur ce troisième triangle comme sur le premier, et ainsi de suite ; on a, par cette construction, une suite de triangles tels que la surface de l'un d'eux est moyenne proportionnelle entre celles des deux triangles qui le précèdent et le suivent immédiatement.*