Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 524-527

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__524_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1318

(voir 2ᵉ série, t. XVIII, p. 528),

PAR M. FERDINANDO PISANI.

Trouver un nombre ayant la double propriété d'être égal à la somme des carrés de deux entiers consécutifs et à celle des carrés de trois entiers consécutifs.

(LIONNET.)

Soit X un nombre ayant la double propriété d'être égal à

$$u^2 + (u+1)^2$$

et à

$$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2;$$

on aura

$$2u^2 + 2u + 1 = 3x^2 + 2,$$

et par suite

$$4u^2 + 4u + 2 = 6x^2 + 4,$$
$$(2u+1)^2 = 6x^2 + 3.$$

Le nombre $2u+1$ étant multiple de 3, on aura, en posant $2u+1=3y$,

$$9y^2=6x^2+3,$$
$$3y^2=2x^2+1,$$

ou

$$2x^2-3y^2=-1.$$

Le développement de $\sqrt{\frac{3}{2}}$ en fraction continue donne la fraction périodique mixte

$$1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\ddots}}}},$$

dont la période se compose des deux quotients incomplets 4, 2; les réduites successives sont

$$\frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{5}{4},\ \frac{11}{9},\ \frac{49}{40},\ \frac{109}{89},\ \frac{485}{396},\ \frac{1079}{881},\ldots.$$

Les numérateurs des réduites de rangs pairs sont les valeurs de x, et les dénominateurs de ces réduites les valeurs de y; on a ainsi

$$x=1,\ 11,\ 109,\ 1079,\ \ldots,$$
$$y=1,\ \ 9,\ \ 89,\ \ 881,\ \ldots.$$

Les valeurs correspondantes de u, déterminées par la relation $2u+1=3y$, sont

$$u=1,\ 13,\ 133,\ 1321,\ \ldots.$$

Puis les équations

$$X=u^2+(u+1)^2=(x-1)^2+x^2+(x+1)^2$$

donnent

$$X = 1^2 + 2^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5,$$
$$X = 13^2 + 14^2 = 10^2 + 11^2 + 12^2 = 365,$$
$$X = 133^2 + 134^2 = 108^2 + 109^2 + 110^2 = 35645,$$
$$X = 1321^2 + 1322^2 = 1078^2 + 1079^2 + 1080^2 = 3492725,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et ainsi de suite.

La question admet donc une infinité de solutions.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Marcello Rochetti et Leinekugel.

Question 1333

(voir 2ᵉ série, t. XVIII, p. 479);

PAR M. A. DROZ.

Étant donnée une spirale logarithmique, on trace la polaire du pôle de cette spirale par rapport à un cercle osculateur à la courbe : trouver l'enveloppe de toutes les polaires ainsi obtenues. (LAISANT.)

Soient $\rho = ae^{m\omega}$ l'équation d'une spirale logarithmique et O le pôle.

On sait que cette courbe a les propriétés suivantes :

1° *Le rayon vecteur* OM, *mené à un point quelconque* M *de la courbe, fait avec la tangente en ce point un angle constant dont la tangente est* $\frac{1}{m}$.

2° *Le centre* C *du cercle osculateur à la courbe au point* M *est à la rencontre de la normale au point* M *et de la perpendiculaire menée par le pôle au rayon vecteur* OM [1].

3° *La spirale logarithmique et sa podaire relative au pôle sont des courbes semblables dont le rapport de similitude est* $\sqrt{1+m^2}$.

4° *Le lieu géométrique de l'extrémité* T *de la sous-tangente* OT *est une spirale logarithmique dont le point* O *est le pôle et qui est semblable à la spirale* $\rho = a e^{m\omega}$, *le rapport de similitude étant* $\frac{1}{m}$.

Remarquons maintenant que la polaire du point O par rapport au cercle osculateur dont C est le centre et CM le rayon s'obtient en élevant une perpendiculaire à la droite CT, à l'extrémité T de la sous-tangente. Il s'ensuit que la podaire par rapport à O de la courbe enveloppe cherchée est une spirale logarithmique; on en peut conclure que la courbe cherchée est elle-même une spirale logarithmique ayant le point O comme pôle.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez, Moret-Blanc, Fauquembergue, Leinekugel, L. Julliard, du lycée Corneille, à Rouen.