NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 332-334

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__332_1>

CORRESPONDANCE.

Monsieur le Rédacteur,

J'ai publié dans le numéro de mai des *Nouvelles Annales* un article intitulé *Sur un procédé d'élimination*, et j'ai donné comme application une manière de former l'équation aux puissances n des racines d'une équation algébrique donnée de degré m (m étant plus petit que n ou égal à n). J'aurais pu ajouter que la démonstration que j'ai faite justifie également la méthode très élégante au moyen de laquelle on forme l'équation en y résultant de l'élimination de x entre les deux équations

$$(1)\qquad f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$

$$(2)\qquad y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{m-1} x^{m-1}.$$

On sait que la fonction rationnelle la plus générale d'une racine de l'équation (1) peut être exprimée par une fonction entière de degré $m-1$ de cette racine, par conséquent par une fonction de la forme (2); ce problème est donc le plus général de son espèce.

Voici la méthode que l'on emploie pour obtenir l'équation transformée.

De l'équation

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{m-1} x^{m-1}$$

on déduit, en multipliant les deux membres par x et en remplaçant x^m par sa valeur tirée de l'équation $f(x) = 0$,

$$(3)\qquad xy = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_{m-1} x^{m-1},$$

$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$ étant des fonctions de $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ et des coefficients de $f(x) = 0$ aisés à déterminer.

En multipliant ensuite les deux membres de l'équation (3) par x et remplaçant encore x^m par sa valeur tirée de $f(x) = 0$, on aura

$$(4)\qquad x^2 y = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_{m-1} x^{m-1},$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$x^{m-1} y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_{m-1} x^{m-1}.$$

Les équations

$$(a)\quad \left\{\begin{array}{l}
\alpha_{m-1} x^{m-1} + \alpha_{m-2} x^{m-2} + \ldots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 - y = 0,\\
\beta_{m-1} x^{m-1} + \beta_{m-2} x^{m-2} + \ldots + \beta_2 x^2 + (\beta_1 - y) x + \beta_0 = 0,\\
\gamma_{m-1} x^{m-1} + \gamma_{m-2} x^{m-2} + \ldots + (\gamma_2 - y) x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0 = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(\lambda_{m-1} - y) x^{m-1} + \lambda_{m-2} x^{m-2} + \ldots + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_0 = 0,
\end{array}\right.$$

considérées comme linéaires en x^{m-1}, x^{m-2}, ..., x, x^0, admettant une solution différente de zéro, le déterminant

$$\Phi(y) = \begin{vmatrix} \alpha_{m-1} & \alpha_{m-2} & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 - y \\ \beta_{m-1} & \beta_{m-2} & \dots & \beta_2 & \beta_1 - y & \beta_0 \\ \gamma_{m-1} & \gamma_{m-2} & \dots & \gamma_2 - y & \gamma_1 & \gamma_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ \lambda_{m-1} - y & \lambda_{m-2} & \dots & \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{vmatrix}$$

est nul; les équations (a) ne sont autre chose que les équations

$$F_1(x) = 0, \quad F_2(x) = 0, \quad \dots, \quad F_{m-1}(x) = 0$$

de la théorie générale, comme il est aisé de le voir; par suite, l'équation $\Phi(y) = 0$, de degré m, donne la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations (1) et (2) aient une racine commune en x.

Veuillez agréer, etc.

Biehler.