MAURICE D'OCAGNE

Applications de géométrie cinématique plane

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 289-303

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__289_0>

APPLICATIONS DE GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE PLANE;

Par M. Maurice D'OCAGNE,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée Fontanes.

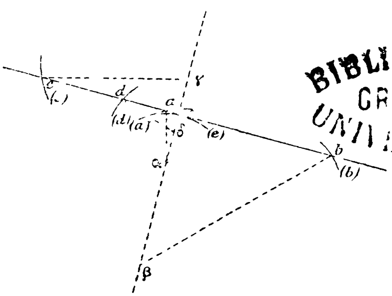
[suite (1).]

IV. — Sur les courbes classiques du troisième ordre.

Nous allons donner une *construction commune* de la normale en un point de l'une quelconque des courbes classiques du troisième ordre : *cissoïde, strophoïde* et *conchoïde*.

Établissons d'abord une formule, qui est d'une application fréquente. Une droite mobile coupe quatre courbes fixes (a), (b), (c) et (d) aux points a, b, c et d de façon que $\frac{ab}{cd} = \frac{m}{n}$, le rapport $\frac{m}{n}$ étant constant (*fig.* 7). Soit e le point où la droite mobile touche son enve-

Fig. 7.



loppe (e); menons la normale à cette enveloppe en ce point; elle coupe respectivement en α, β, γ et δ les nor-

(1) *Voir* même tome, p. 264.

males en a, b, c et d aux courbes (a), (b), (c) et (d). M. Mannheim a démontré[1] que, si Δab et Δcd représentent les variations de longueur des segments ab et cd pour un déplacement infiniment petit de la droite mobile, et $\Delta\theta$ l'angle de contingence de (e), on a

$$\frac{\Delta ab}{\Delta\theta} = \alpha\beta, \quad \frac{\Delta cd}{\Delta\theta} = \gamma\delta;$$

par suite

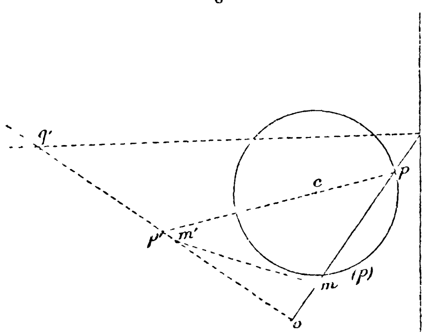
$$\frac{\Delta ab}{\Delta cd} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$$

et

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} = \frac{m}{n}.$$

Cela posé, considérons dans un plan un point o, une circonférence (p) et une droite (q) quelconques (*fig.* 8).

Fig. 8.



Autour de o faisons pivoter une sécante qui coupe la circonférence p en (p) et la droite (q) en q. Portons $om = pq$ et cherchons la normale au lieu que décrit le point m, pour la position considérée.

La perpendiculaire à oq en o, qui est la normale à l'enveloppe de cette droite, coupe en p' et en q' les nor-

---

[1] *Loc. cit.*, p. 203.

males à la circonférence (q) et à la droite (p) en p et q. Comme $om = pq$, on a, d'après ce qui vient d'être vu, la normale au lieu de m en portant $om' = p'q'$ et en tirant $m'm$.

Si le point o est sur la circonférence (p) et si la droite (q) est tangente à cette circonférence, le lieu du point m est une *cissoïde*.

Si le point o est sur la circonférence (p) et si la droite (q) passe par le centre c de cette circonférence, le lieu du point m est une *strophoïde*, ayant pour point double le point o et pour asymptote la droite (q).

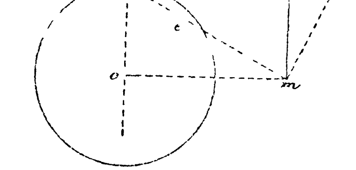
Enfin, si le point o est au centre de la circonférence (p) et si la droite (q) est tangente à cette circonférence, le lieu du point m est une *conchoïde* de la droite (q) par rapport au point o.

En appliquant à chacun de ces trois cas la solution générale donnée plus haut, on obtient la normale à chacune des courbes correspondantes.

V. — Sur la spirale d'Archimède.

Un côté sc (fig. 9) d'un angle droit roule sur un cercle de centre o; l'autre côté sm est égal au rayon

Fig. 9.



du cercle; le point m décrit une spirale d'Archimède : trouver la normale et le centre de courbure [1].

---

[1] Gilbert, Ouvrage cité, p. 60, ex. 3.

Rappelons le théorème de Descartes :

Lorsqu'une ligne roule sur une autre ligne, sans glissement, dans une position quelconque, la normale à la courbe décrite par un point fixe de la première ligne passe par le point de contact des deux lignes considérées.

De là résulte immédiatement que la normale demandée est la droite mc.

Considérons maintenant le triangle variable scm. La normale au lieu décrit par c est co; la normale au lieu décrit par s, qui est la développante du cercle considéré, est sc, et c est le centre de courbure correspondant; la normale au lieu décrit par m est mc. De plus, sc touche son enveloppe au point c, ms au point s, car ms est tangente à la développante sur laquelle se meut s.

Menons alors la tangente à la courbe décrite par m, c'est-à-dire la perpendiculaire mt à mc, qui coupe cs en t. Nous avons, en appelant e le centre de courbure cherché, c'est-à-dire le point où mc touche son enveloppe,

$$\frac{d(c)}{d(s)} = \frac{co}{sc},$$

$$\frac{d(s)}{d(m)} = \frac{sc}{mc}.$$

$$\frac{d(m)}{d(c)} = \frac{me.mt}{ce.ct}.$$

Multipliant ces égalités membre à membre, il vient

$$1 = \frac{me.mt.co}{ce.ct.mc} = \frac{me.\overline{mt}^2}{ce.\overline{ct}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{me}{ec} = \frac{\overline{ct}^2}{\overline{mt}^2}.$$

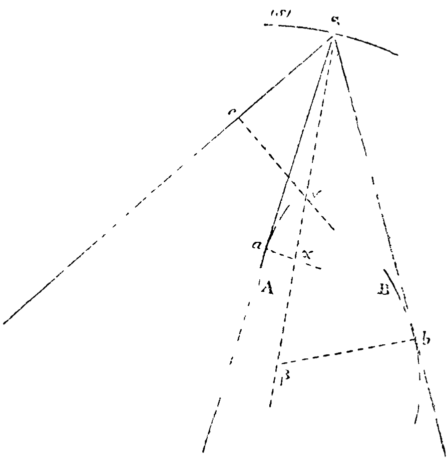
Le point e est donc symétrique, par rapport au milieu du côté mc, du pied de la droite symétrique de la mé-

diane issue du sommet t par rapport à la bissectrice issue du même sommet.

VI. — Sur les caustiques.

Considérons un angle variable asb dont le sommet décrit la courbe (s), les côtés sa et sb enveloppant respectivement les courbes A et B (*fig.* 10). Dans chacune

Fig. 10.



des positions de cet angle, tirons la droite sc faisant avec sa un angle égal à l'angle asb, et cherchons à construire la normale à l'enveloppe de sc.

Les normales à A et à B en a et b coupent aux points α et β la normale à (s) en s. Soit γ le point où la normale cherchée rencontre $s\alpha$. Si φ est la valeur de l'angle asb, on a, pour un déplacement infiniment petit de l'angle mobile ([1]),

$$\Delta\varphi = d(s)\left(\frac{1}{s\alpha} - \frac{1}{s\beta}\right).$$

([1]) *Géom. ciném.*, p. 204.

De même, l'angle *asc* donne

$$\Delta\varphi = d(s)\left(\frac{1}{s\gamma} - \frac{1}{s\alpha}\right).$$

Il résulte de là que

$$\frac{1}{s\alpha} - \frac{1}{s\beta} = \frac{1}{s\gamma} - \frac{1}{s\alpha}$$

ou que

$$\frac{2}{s\alpha} = \frac{1}{s\beta} + \frac{1}{s\gamma},$$

c'est-à-dire que les points β et γ sont conjugués harmoniques par rapport aux points s et α.

Application aux caustiques par réflexion. — Considérons alors une courbe (s) et un point lumineux p situé dans son plan (¹). Un rayon quelconque ps issu de p se réfléchit sur (s) suivant sr tel que $\widehat{rsn} = \widehat{nsp}$, sn étant normale à (s).

L'enveloppe du rayon réfléchi sr est la caustique C de la courbe (s) par rapport au point p. Cherchons à construire la normale à cette caustique.

Soit h le point où cette normale rh rencontre sn. La normale à l'enveloppe de sp, c'est-à-dire la perpendiculaire à sp au point p, coupe sn au point n. Si donc e est le centre de courbure de la courbe (s) relatif au point s, on voit, d'après la question préliminaire, que *le point h est le conjugué harmonique du point n par rapport aux points s et e.*

Ce théorème permet d'obtenir très facilement la normale hr, surtout lorsque la courbe (s) est une circonférence, ce qui est le cas le plus ordinaire.

On voit que le théorème précédent a encore lieu pour les caustiques de surfaces en coupant la surface donnée

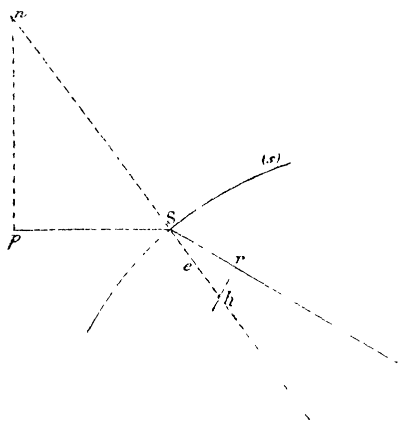
---

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

par le plan mené par le point lumineux et la normale à la surface au point considéré.

Caustiques par réfraction. — Considérons la courbe (s) et le point lumineux p situé dans son plan (*fig.* 11); un rayon quelconque ps issu de p se réfracte sur (s) et

Fig. 11.



prend la direction sr. L'enveloppe de sr est la caustique par réfraction à laquelle nous allons chercher à construire la normale. La perpendiculaire à ps au point p coupe au point n la normale sn à (s). Soient de plus e le centre de courbure de (s) relatif à s, h le point où la normale cherchée rh coupe sn.

On a, comme précédemment,

$$\Delta\left(\widehat{psn}\right) = d(s)\left(\frac{1}{sn} + \frac{1}{se}\right),$$

$$\Delta\left(\widehat{hsr}\right) = d(s)\left(\frac{1}{se} - \frac{1}{sh}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\Delta\left(\widehat{psn}\right)}{\Delta\left(\widehat{hsr}\right)} = \frac{\dfrac{1}{se} + \dfrac{1}{sn}}{\dfrac{1}{se} - \dfrac{1}{sh}},$$

ou, puisque les angles $\Delta(\widehat{psn})$ et $\Delta(\widehat{hsr})$ sont infiniment petits,

$$\frac{\Delta\left(\sin\widehat{psn}\right)}{\Delta\left(\sin\widehat{hsr}\right)} = \frac{\frac{1}{sn}+\frac{1}{se}}{\frac{1}{se}-\frac{1}{sh}},$$

ou, si a est l'indice au passage du premier milieu dans le second,

$$a = \frac{\frac{1}{sn}+\frac{1}{se}}{\frac{1}{se}-\frac{1}{sh}},$$

$$\frac{a}{se}-\frac{a}{sh}=\frac{1}{sn}+\frac{1}{se},$$

$$\frac{a}{sh}+\frac{1}{sn}=\frac{a-1}{se}.$$

Le point h est ainsi déterminé, et par suite la normale hr.

La détermination est évidemment la même lorsqu'il s'agit d'une surface au lieu d'une courbe.

Remarquons enfin que, pour les caustiques de réfraction comme pour les caustiques de réflexion, le point h est le foyer conjugué du point n, considéré comme point lumineux, par rapport au cercle osculateur à la courbe (s) au point s, pris comme courbe réfractante dans un cas, comme courbe réfléchissante dans l'autre.

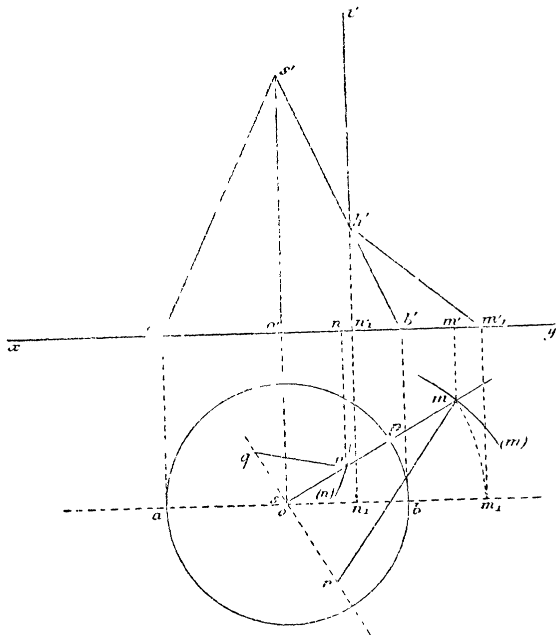
VII. — Sur les anamorphoses.

Considérons un cône circulaire droit $(sab, s'a'b')$ reposant par sa base sur le plan horizontal et une courbe (m) tracée dans ce plan (*fig.* 12).

Soit (n) l'image de (m) produite par le cône supposé poli sur sa surface externe pour un œil situé à l'infini dans la direction de l'axe de ce cône. La courbe (m) est dite *anamorphose de la courbe* (n).

On peut se proposer de déterminer l'anamorphose (m) de façon que (n) soit une courbe donnée. Menons la sé-

Fig. 12.



cante on qui coupe la courbe (n) au point n, et rabattons-la sur ab. Le point (n, n') vient en (n_1, n'_1). Le rayon réfléchi doit donc être $h'i'$, parallèle à $s'o'$; on en déduit le rayon incident $h'm'_1$; du point (m_1, m'_1) on revient au point (m, m'). Cherchons la normale à la courbe (m) au point m. Soient q le point où la perpendiculaire à op en o coupe la normale nq à (n); r le point où oq coupe la normale cherchée.

On a, d'après un principe déjà appliqué au paragraphe IV,

$$\frac{\Delta . mp}{\Delta . np} = \frac{ro}{qo}.$$

Mais

$$\frac{mp}{np} = \frac{m_1 b}{n_1 b} = \frac{m'_1 b'}{n'_1 b'}.$$

Or

$$\widehat{n'_1 h' b'} = \widehat{s' h' i'} = \widehat{b' h' m'_1},$$

par suite,

$$\frac{m'_1 b'}{n'_1 b'} = \frac{m'_1 h'}{n'_1 h'} = \frac{1}{\cos \widehat{n'_1 h' m'_1}}$$

ou

$$\frac{mp}{np} = \frac{1}{\cos \widehat{n'_1 h' m'_1}}.$$

Mais

$$\widehat{n'_1 h' b'} = \widehat{o' s' b'}.$$

Si donc nous posons

$$\widehat{a' s' b'} = \alpha,$$

nous aurons

$$\widehat{n'_1 h' m'_1} = \alpha;$$

par conséquent,

$$\frac{mp}{np} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

et

$$\frac{\Delta . mp}{\Delta . np} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

ou

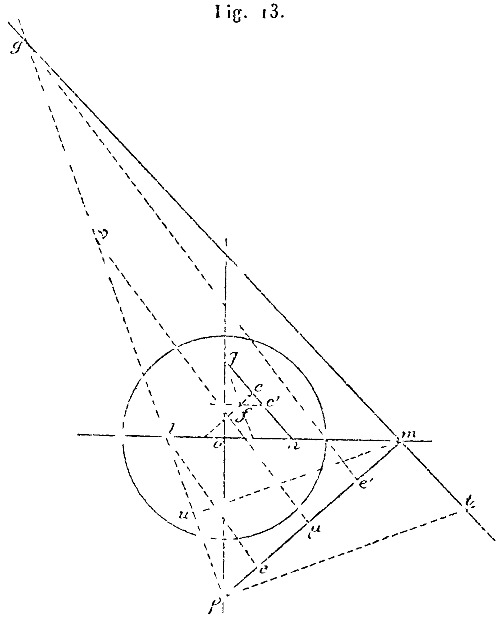
$$\frac{ro}{qo} = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad ro = \frac{qo}{\cos\alpha}.$$

De plus, il est évident que les points q et r sont de part et d'autre du point o; la normale cherchée mr se trouve donc ainsi déterminée.

Cela fait, cherchons à déterminer le centre de courbure en un point de l'anamorphose (m), connaissant le centre de courbure c au point correspondant de la courbe (n) (*fig.* 13).

Construisons d'abord la normale au lieu que décrit le point de rencontre q de la normale nq au lieu de n et de la perpendiculaire oq à on. Dans le triangle rectangle onq, le sommet o est fixe, la normale au lieu du

Fig. 13.



sommet n est nq et le côté nq touche son enveloppe au point c. Nous savons, dès lors, construire la normale au lieu du sommet q (*voir* p. 271). Nous prenons $nc' = cq$; la parallèle à no menée par c' coupe en f la perpendiculaire à nq menée par c; qf est la normale demandée.

Or, nous venons de voir que, si α désigne l'angle au sommet du miroir conique, on a

$$\frac{oq}{op} = \cos\alpha.$$

Le lieu du point p est donc homothétique au lieu du point q, et la normale pl au premier de ces lieux est parallèle à la normale qf au second.

Cela posé, cherchons le centre de courbure relatif au point m, c'est-à-dire le point e, où mp touche son enveloppe.

La tangente pt au lieu décrit par p coupe en t la tangente mt au lieu décrit par m.

Donc

$$\frac{d(m)}{d(p)} = \frac{mt.me}{pt.pe}.$$

Mais le triangle rectangle omp pivote autour de son sommet o; de plus, la normale mp au lieu décrit par m coupe en p la perpendiculaire op à om, la normale pl au lieu décrit par p coupe en l la perpendiculaire om à op; par suite,

$$\frac{d(m)}{d(p)} = \frac{mp}{pl}.$$

Par conséquent,

$$\frac{mt\ me}{pt.pe} = \frac{mp}{pl},$$

d'où

$$\frac{me}{pe} = \frac{mp.pt}{pl.\,mt}.$$

Du point m abaissons sur pl la perpendiculaire mu; les angles mtp et mpu sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires. Donc

$$\frac{pt}{mt} = \frac{mp}{pu},$$

et l'égalité précédente devient

$$\frac{me}{pe} = \frac{\overline{mp}^2}{pl.pu}.$$

Mais, dans le triangle rectangle mpg,

$$\overline{mp}^2 = pu.pg.$$

Conséquemment

$$\frac{me}{pe} = \frac{pg}{pl},$$

d'où la construction :

On joint le milieu ν de lg au milieu μ de mp; par le point l on mène le parallèlement à $\nu\mu$: e est le point cherché.

En effet, par g menons ge' parallèlement à $\nu\mu$; nous avons

$$\frac{e'p}{ep} = \frac{gp}{lp}$$

ou, puisque μ est le milieu de ee',

$$\frac{me}{pe} = \frac{pg}{pl}.$$

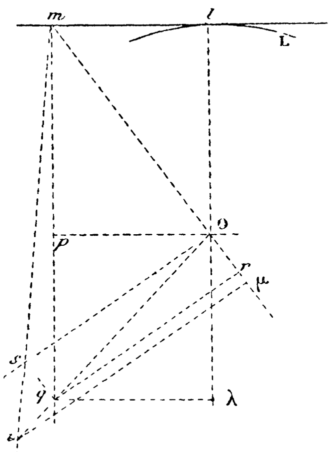
VIII. — Sur les podaires.

M. Mannheim donne, dans sa *Géométrie cinématique* (p. 196), un procédé pour construire le centre de courbure en un point de la podaire d'une courbe quelconque. Il emploie dans ce procédé une certaine circonférence. Je vais donner une solution tout à fait différente de la même question. La construction que je vais exposer, également très simple, n'exige absolument que l'emploi de droites.

Soient donnés le point p et la courbe L (*fig.* 14). Du point p, abaissons sur une tangente quelconque lm à la courbe L la perpendiculaire pm. Cherchons le centre de courbure de la courbe décrite par le point m pour la position considérée.

Les perpendiculaires lo à lm, po à pm se coupent en o; mo est la normale au lieu décrit par m. Cherchons le centre de courbure situé sur cette normale, c'est-à-dire le point μ où mo touche son enveloppe, connaissant le centre de courbure λ de la courbe L.

Fig. 14.



Remarquons d'abord que la normale oq au lieu décrit par o est déterminée par le point de rencontre q des perpendiculaires pq et λq à op et $o\lambda$, puisque les côtés de l'angle droit $po\lambda$ touchent respectivement leurs enveloppes aux points p et λ.

Considérons alors le triangle variable mol. Soit i le point où oq rencontre la perpendiculaire à mo au point μ cherché. Nous avons

$$\frac{d(m)}{d(o)} = \frac{m\mu}{oi},$$

$$\frac{d(o)}{d(l)} = \frac{qo}{l\lambda},$$

$$\frac{d(l)}{d(m)} = \frac{l\lambda}{mo}.$$

Multiplions ces trois égalités membre à membre; il vient

$$1 = \frac{m\mu . oq}{oi . mo}$$

ou

$$\frac{m\mu}{mo} = \frac{oi}{oq},$$

d'où la construction :

Par les points q et o menons à mo les perpendiculaires qr et os; portons sur os la longueur os = rq; ms coupe oq au point i; du point i abaissons sur mo la perpendiculaire iμ; μ est le centre de courbure cherché.

On a, en effet, d'après cette construction,

$$\frac{m\mu}{mo} = \frac{mi}{ms} = \frac{oi}{oq}.$$

Comme application de cette règle, on a immédiatement la détermination du centre de courbure de la *cissoïde* considérée comme podaire d'une parabole par rapport à son sommet, de la *lemniscate de Bernoulli* considérée comme podaire d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre, du *scarabée* considéré comme podaire d'une épicycloïde à quatre points de rebroussement par rapport à son centre. On sait, en effet, construire le centre de courbure de la parabole et de l'hyperbole équilatère, qui sont des coniques, et celui de l'épicycloïde à quatre points de rebroussement, puisque pour cette dernière courbe le rayon de courbure est le triple de la distance du centre à la tangente au point considéré.