Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 280-287

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__280_1>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Talayrach, capitaine d'Artillerie (1).

J'ai l'honneur de vous envoyer ci-joint une démonstration géométrique du théorème de Poncelet sur les polygones qui sont à la fois inscrits à une circonférence et circonscrits à une autre. Ce théorème peut s'énoncer ainsi :

Étant données deux circonférences, si l'on prend un point a_1 *sur l'une d'elles et que l'on mène les tangentes successives* a_1a_2, a_2a_3, ..., $a_{n-1}a_n$ *à la deuxième, la droite* a_1a_n *qui ferme le polygone enveloppe un cercle coradical aux deux cercles donnés.*

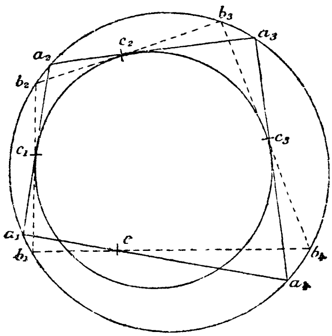
La démonstration qu'en a donnée Poncelet s'appuie sur des calculs assez longs; je ne sais s'il en a été donné une purement géométrique. En tout cas, je vous livre la

(1) Cette Lettre, qui porte la date du 24 mars 1873, et qui malheureusement avait été égarée, est antérieure à l'étude *Sur la strophoïde*, publiée en 1875 par M. Maleyx. Ch. B.

mienne en vous laissant libre de la publier si vous le croyez utile.

Solution. — Supposons menées (*fig.* 1) les trois tan-

Fig. 1.



gentes successives a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4 et la corde a_4a_1. Pour trouver le point de contact de cette corde avec son enveloppe, prenons sur la première circonférence un point b_1 infiniment voisin de a_1 et menons, en partant de ce point, les tangentes successives b_1b_2, b_2b_3, b_3b_4 et la corde b_4b_1. J'appelle c_1, c_2, c_3 les points d'intersection des droites (a_1a_2, b_1b_2), (a_2a_3, b_2b_3), (a_3a_4, b_3b_4), et C le point d'intersection des cordes (a_4a_1, b_4b_1).

A la limite, les points c_1, c_2, c_3 sont les points de contact des tangentes avec le cercle, et le point C le point de contact de la corde avec son enveloppe.

Or les triangles semblables $a_\alpha b_\alpha c_\alpha$, $a_{\alpha+1}b_{\alpha+1}c_{\alpha+1}$ donnent

$$\frac{a_1b_1}{a_2b_2} = \frac{a_1c_1}{b_2c_1},$$

$$\frac{a_2b_2}{a_3b_3} = \frac{a_2c_2}{b_3c_2},$$

$$\frac{a_3b_3}{a_4b_4} = \frac{a_3c_3}{b_4c_3}.$$

Multipliant membre à membre et passant aux limites, en remarquant que $\lim b_2 c_1 = a_2 c_1 = a_2 c_2$, on a

$$(1) \qquad \lim \frac{a_1 b_1}{a_4 b_4} = \frac{a_1 c_1}{a_4 c_3}.$$

De son côté, la similitude des deux triangles $a_1 b_1 C$, $a_4 b_4 C$ donne la relation

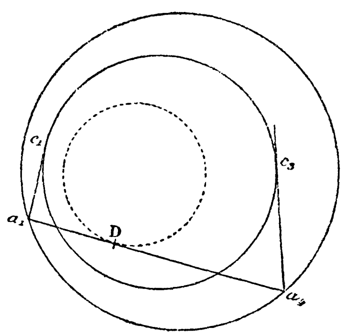
$$(2) \qquad \lim \frac{a_1 b_1}{a_4 b_4} = \frac{a_1 C}{a_4 C}.$$

Comparant (1) à (2), on a, pour déterminer la position limite du point C, la relation très-simple

$$(3) \qquad \frac{a_1 C}{a_4 C} = \frac{a_1 c_1}{a_4 c_3}.$$

Cela posé, si nous décrivons (*fig.* 2) un cercle cora-

Fig. 2.



dical aux deux cercles donnés et tangent à la corde $a_4 a_1$, le point de contact D sera donné, d'après une propriété bien connue des cercles coradicaux, par la relation

$$(4) \qquad \frac{a_1 D}{a_4 D} = \frac{a_1 c_1}{a_4 c_3}.$$

Le point D n'est donc autre que le point C où la corde $a_4 a_1$ touche son enveloppe.

Il en résulte que, si d'un côté nous traçons les différentes cordes $a_4 a_1$, et que de l'autre nous tracions les différents cercles coradicaux qui leur sont tangents, ces deux séries de lignes auront une même enveloppe. Or deux cercles coradicaux ne peuvent avoir, en dehors des deux points fixes communs sur l'axe radical, un troisième point commun sans se confondre. Tous ces cercles se confondent donc en un seul, qui n'est autre que l'enveloppe cherchée et qui est indépendant de la position du point a_1 sur la première circonférence.

C. Q. F. D.

Nota. — Cette démonstration s'appliquerait de la même manière au cas où les droites $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, ..., $a_p a_{p+1}$ seraient tangentes, non à un cercle unique, mais à une série de cercles coradicaux.

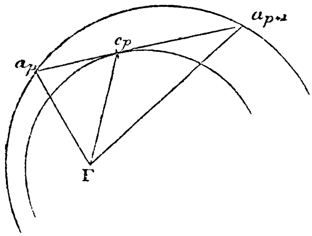
Première conséquence. — La première conséquence de cette proposition est que, si la droite $a_n a_1$ touche la seconde circonférence donnée, tous les polygones tels que $a_1 a_2 \ldots a_n$ sont à la fois inscrits à un cercle et circonscrits à un autre.

Deuxième conséquence. — Les diagonales d'ordre quelconque des polygones qui sont à la fois inscrits à un cercle et circonscrits à un autre touchent d'autres cercles coradicaux aux deux cercles donnés.

Troisième conséquence. — Si le polygone à la fois inscrit et circonscrit a un nombre pair de côtés, les diagonales qui joignent les sommets opposés passent par un même point F, qui n'est autre que le cercle coradical de rayon nul.

Quatrième conséquence. — Si $a_p a_{p+1}$ (*fig.* 3) sont deux sommets d'un de ces polygones et c_p son point de contact, Fc_p est la bissectrice de l'angle $a_p F a_{p+1}$. Par suite, dans les polygones inscrits et circonscrits d'un nombre pair de côtés, les droites joignant les points de contact des côtés opposés concourent aussi au point F.

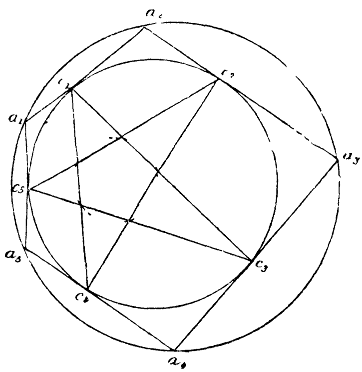
Fig. 3.



Cinquième conséquence. — De ce que la droite Fc_p est la bissectrice de l'angle a_pFa_{p+1}, on peut encore déduire que, dans tout polygone inscrit et circonscrit, la somme des diagonales joignant les sommets 2 à 2, 3 à 3, ..., m à m est dans un rapport constant avec le périmètre du polygone.

Sixième conséquence. — Dans tout polygone inscrit et circonscrit, les droites qui joignent 2 à 2, 3 à 3, ...,

Fig. 4.



m à m (*fig.* 4) les points de contact des côtés déterminent par leurs intersections successives les sommets d'un polygone inscriptible.

Puisque j'en suis au théorème de Poncelet, permettez-moi de vous en donner une dernière conséquence assez remarquable, qui peut se traduire ainsi :

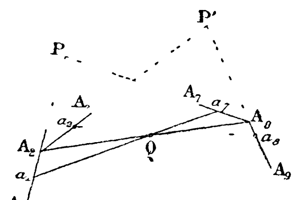
Proposition. — *Étant donné un pentagone quelconque* ABCDE, *on joint les diagonales et l'on forme ainsi un second pentagone* ACEBD. *Les points de contact de ces deux pentagones avec les deux coniques qui leur sont inscrites sont 4 à 4 en ligne droite.*

Je crois que cette proposition pourrait être donnée comme exercice à des élèves de Mathématiques spéciales. Voici d'ailleurs comment je la démontre.

Lemme. — *Étant donné un polygone inscrit à un cercle et circonscrit à un autre cercle, si l'on joint les points de contact des côtés 2 à 2, 3 à 3, ..., p à p, ces droites se coupent sur les diagonales joignant les sommets 2 à 2, 3 à 3, ..., p à p, précisément aux points où celles-ci touchent leur cercle enveloppe.*

Soit menée par exemple la diagonale A_2A_8 (*fig.* 5),

Fig. 5.



qui est coupée en Q par la droite a_1a_7. Prolongeons les côtés A_1A_2, A_8A_7 jusqu'en P. Le triangle PA_2A_8, coupé par la transversale a_1Qa_7, donne

$$Pa_1 . A_2Q . A_8a_7 = Pa_7 . A_8Q . A_2a_1,$$

et, à cause de $Pa_1 = Pa_7$, il reste

$$\frac{A_2Q}{A_8Q} = \frac{A_2a_1}{A_8a_7}.$$

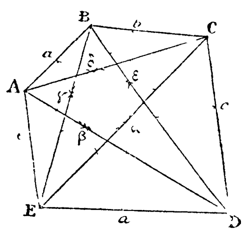
De même le triangle $P'A_2A_8$, coupé par la transversale $a_2Q'a_8$, donnerait

$$\frac{A_2Q'}{A_8Q'} = \frac{A_2a_2}{A_8a_8},$$

et, à cause de $A_2a_2 = A_2a_1$ et $A_8a_8 = A_8a_7$, on voit que Q et Q' se confondent, c'est-à-dire que les droites a_1a_7, a_2a_8 se coupent bien sur la diagonale A_2A_8. De plus, à cause de $\frac{A_2Q}{A_8Q} = \frac{A_2a_2}{A_8a_8}$, le point Q n'est autre que le point où la diagonale A_2A_8 touche le cercle enveloppe des diagonales telles que A_2A_8.

Appliquons cette proposition au pentagone inscrit et circonscrit à deux cercles. Menons les diagonales joignant les sommets 2 à 2. D'après ce qui précède, les droites ac, bd se coupent sur la diagonale BD (*fig.* 6) au

Fig 6



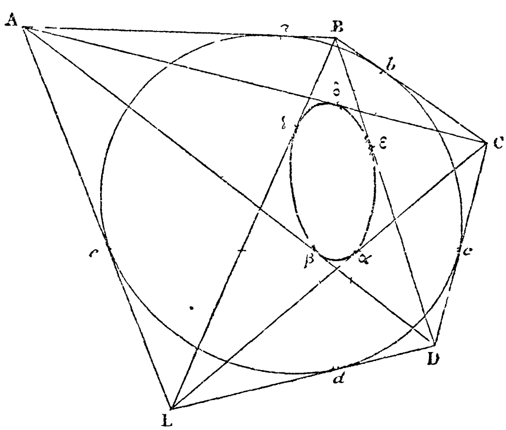
point ε, où cette diagonale touche le cercle enveloppe. De même les droites ac, eb se coupent en δ sur la diagonale AC, au point où celle-ci touche le cercle enveloppe. Donc les quatre points a, δ, ε, c, où les côtés et les diagonales touchent les deux cercles inscrits, sont en ligne droite. De même tous les autres groupes de quatre points de contact.

Soit maintenant un pentagone *quelconque ;* nous pouvons toujours le projeter de manière que les deux coniques qui lui sont l'une inscrite et l'autre circonscrite se projettent suivant deux cercles. La conique inscrite au pentagone des diagonales se projettera aussi suivant un cercle et la proposition énoncée, vraie pour les pentagones inscrits et circonscrits à deux cercles, se trouve étendue à tous les pentagones.

Cette proposition pourrait être énoncée sous une seconde forme :

Étant donné un pentagone $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ (*fig.* 7), *on forme le pentagone abcde qui a pour sommets les points de*

Fig. 7



rencontre des côtés 2 à 2, et l'on décrit les deux coniques circonscrites à ces deux pentagones. Les tangentes menées à ces deux coniques par les sommets se coupent 4 à 4 aux mêmes points.