Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 236-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__236_1>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Bourguet.

J'ai l'honneur de vous adresser la solution de deux questions proposées à la réunion des Sociétes savantes en 1877.

1° *Le sommet d'un angle droit décrit une ellipse tandis qu'un de ses côtés tourne autour du centre : trouver l'enveloppe de l'autre côté.*

---

(1) Sur cette question, voir ma Note *Sur un problème d'Algèbre* (*Bulletin de la Société mathematique*, t. V, p. 26).

Soient P un point de l'ellipse, u le produit des rayons vecteurs, ρ le rayon central, θ l'angle que ρ fait avec la normale, ω l'angle qu'il fait avec l'axe focal.

Nous avons

$$\rho^2 = a^2 + b^2 - u,$$

$$\operatorname{tang}^2\theta = \left(1 - \frac{u}{a^2}\right)\left(\frac{u}{b^2} - 1\right),$$

$$\cos^2\omega = \frac{a^4}{c^2\rho^2}\left(1 - \frac{u}{a^2}\right), \quad \sin^2\omega = \frac{b^4}{c^2\rho^2}\left(\frac{u}{b^2} - 1\right).$$

Cela posé, construisons un point du lieu, et pour cela menons OM, PN perpendiculaires à OP, PM normale ; M sera le centre instantané de rotation. Menons MN perpendiculaire à PN ; N sera un point du lieu. Soient α, β les projections de OP, PN sur l'axe focal, nous avons

$$\alpha^2 = \frac{a^4}{c^2}\left(1 - \frac{u}{a^2}\right),$$

$$\beta^2 = \rho^2 \operatorname{tang}^2\theta \sin^2\omega = \frac{b^4}{c^2}\left(1 - \frac{u}{a^2}\right)\left(\frac{u}{b^2} - 1\right).$$

Donc

$$\mathrm{X} = \alpha + \beta = \frac{1}{c}\sqrt{1 - \frac{u}{a^2}}\left[a^2 + b^2\left(\frac{u}{b^2} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{c}\sqrt{1 - \frac{u}{a^2}}\,(c^2 + u),$$

ou bien

$$a^2c^2\mathrm{X}^2 = (a^2 - u)(c^2 + u)^2,$$

et, en changeant a, b en b, a,

$$b^2c^2\mathrm{Y}^2 = (u - b^2)(c^2 - u)^2.$$

Il s'agit d'éliminer u entre ces deux équations. Développons :

$$u^3 - (b^2 - c^2)u^2 - c^2(a^2 + b^2)u + a^2c^2(\mathrm{X}^2 - c^2) = 0,$$

$$u^3 - (a^2 + c^2)u^2 + c^2(a^2 + b^2)u - b^2c^2(\mathrm{Y}^2 + c^2) = 0,$$

par addition et soustraction,

$$2u^3 - (a^2+b^2)u^2 + c^2[a^2X^2 - b^2Y^2 - c^2(a^2+b^2)] = 0,$$
$$3u^2 - 2(a^2+b^2)u + [a^2X^2 + b^2Y^2 - c^4] = 0.$$

Posons, pour abréger,

$$U = a^2X^2 + b^2Y^2 - c^4, \quad V = a^2X^2 - b^2Y^2 - c^2(a^2+b^2);$$

multiplions la première équation par 3 et la seconde par $2u$, et retranchons :

$$3u^2 - 2(a^2+b^2)u + U = 0,$$
$$(a^2+b^2)u^2 - 2Uu + 3c^2V = 0,$$

d'où

$$4[(a^2+b^2)^2 - 3U][U^2 - 3c^2(a^2+b^2)V]$$
$$= [(a^2+b^2)U - 9c^2V]^2.$$

Cette équation peut être mise sous une forme plus élégante; pour cela, posons

$$(a^2+b^2)^2 - 3U = S, \quad (a^2+b^2)U - 9c^2V = T.$$

On obtient, par la substitution,

$$4S^3 = [3T - 2S(a^2+b^2)]^2,$$

courbe du sixième degré qui a quatre points de rebroussement aux points d'intersection de $S=0$, $T=0$ et tangente en ces points à $3T - 2(a^2+b^2)S = 0$, et qui a quatre points doubles sur les axes de l'ellipse. Les deux situés sur le petit axe sont imaginaires; les deux autres sont réels si $a^2 > 2b^2$. Il en est de même des points de rebroussement, réels si $a^2 > 2b^2$ et imaginaires si $a^2 < 2b^2$.

Dans le premier cas, la courbe se compose de deux arcs tangents à l'ellipse aux sommets du petit axe, concaves vers le centre, et de deux arcs tangents à l'ellipse aux sommets du grand axe, convexes du côté du centre, se raccordant aux deux autres, aux points de rebroussement.

Dans le second cas, la courbe se compose d'une boucle, sans points singuliers, inscrite dans l'ellipse.

Les coordonnées des points doubles sont $Y = 0$, $X = \frac{2bc}{a}$, et le coefficient angulaire de la tangente en ce point $\frac{a}{\sqrt{c^2 - b^2}}$. Cette courbe a pour podaire, relativement au centre, l'ellipse directrice.

2° *Trouver le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère.*

Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ les quatre côtés du quadrilatère. Entre ces quatre polynômes, nous avons la relation d'identité

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0.$$

Soient α, β, γ, δ les distances d'un foyer aux quatre côtés du quadrilatère, α', β', γ', δ' les distances de l'autre foyer. Nous avons, comme on sait,

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma' = \delta\delta'$$

ou

$$\frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha'}} = \frac{\beta}{\frac{1}{\beta'}} = \frac{\gamma}{\frac{1}{\gamma'}} = \frac{\delta}{\frac{1}{\delta'}}.$$

Comme les premières distances satisfont à la relation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0,$$

les secondes satisfont à la relation

$$\frac{A}{\alpha'} + \frac{B}{\beta'} + \frac{C}{\gamma'} + \frac{D}{\delta'} = 0.$$

Telle est l'équation du lieu : courbe du troisième degré passant par les sommets du quadrilatère. La tangente en ces points est symétrique de la diagonale par rapport à la bissectrice. Les points à l'infini sont donnés par la parabole inscrite. Comme le centre de cette ellipse infinie est sur la droite qui passe par le milieu des diagonales, on aura l'asymptote en prenant le symétrique du foyer de la parabole par rapport à cette droite et en lui menant une parallèle par ce dernier point. La courbe se compose d'une boucle et d'une branche infinie.