Nouvelles annales de mathématiques

H. Laurent

Sur la théorie des équations différentielles ordinaires

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 153-161

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__153_0>

SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES;

Par M. H. LAURENT.

On sait que, étant donnée une équation $M\,dx + N\,dy = 0$, il existe toujours un multiplicateur λ tel que

$$\lambda M\,dx + \lambda N\,dy$$

soit la différentielle d'une fonction φ, en sorte que la connaissance du facteur λ permet de ramener l'intégration de l'équation proposée à une simple quadrature.

Il existe à l'égard des équations simultanées un théorème analogue : *si*, en effet, *on considère le système*

$$(1)\quad \begin{cases} P_{11}dx_1 + P_{12}dx_2 + \ldots + P_{1n+1}dx_{n+1} = 0 \quad \text{ou} \quad \Omega_1 = 0, \\ P_{21}dx_1 + P_{22}dx_2 + \ldots + P_{2n+1}dx_{n+1} = 0 \quad \text{ou} \quad \Omega_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_{n1}dx_1 + P_{n2}dx_2 + \ldots + P_{nn+1}dx_{n+1} = 0 \quad \text{ou} \quad \Omega_n = 0, \end{cases}$$

P_{ij} *désignant une fonction quelconque des variables* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, *il existera toujours un système de multiplicateurs* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *tels que l'expression* $\lambda_1\Omega_1 + \lambda_2\Omega_2 + \ldots + \lambda_n\Omega_n$ *soit une différentielle exacte.*

Nous donnerons au système des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ le nom de *système de multiplicateurs* des équations (1). Pour démontrer l'existence de ce système, désignons par

$$(2)\qquad F_1 = c_1, \quad F_2 = c_2, \quad \ldots, \quad F_n = c_n$$

les intégrales des équations (1) résolues par rapport aux constantes d'intégration $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Si l'on différentie ces équations (2), on aura

$$(3) \qquad dF_1 = 0, \quad dF_2 = 0, \quad \ldots, \quad dF_n = 0,$$

et ces équations devront fournir pour les rapports

$$dx_1 \div dx_2 \div \ldots \div dx_{n+1}$$

les mêmes valeurs que les équations (1). On sait en effet que, en éliminant entre les intégrales (2) et leurs différentielles les constantes d'intégration, on doit retomber sur un système équivalent à (1). Ce système équivalent est le système (3).

Or, les formules (1) et (3) fournissant les mêmes valeurs des quantités $dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_{n+1}$, on sait, d'après la théorie des équations linéaires, que l'une quelconque des formules (3) est de la forme

$$\lambda_1 \Omega_1 + \lambda_2 \Omega_2 + \ldots + \lambda_n \Omega_n = 0,$$

ce qui met en évidence l'existence des facteurs λ.

Il existe une infinité de systèmes de multiplicateurs. En effet, soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ un tel système, et soit

$$\lambda_1 \Omega_1 + \lambda_2 \Omega_2 + \ldots + \lambda_n \Omega_n = dF_1.$$

Il est clair que, φ désignant une fonction quelconque, $\lambda_1 \varphi(F_1), \lambda_2 \varphi(F_1), \ldots$ sera encore un système de multiplicateurs. Soient plus généralement

$$\begin{array}{llll} \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \ldots, & \lambda_{1n}, \\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \ldots, & \lambda_{2n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \lambda_{i1}, & \lambda_{i2}, & \ldots, & \lambda_{in} \end{array}$$

i systèmes de multiplicateurs et

$$\Sigma \lambda_{1j} \Omega_j = dF_1, \quad \Sigma \lambda_{2j} \Omega_j = dF_2, \quad \ldots, \quad \Sigma \lambda_{ij} \Omega_j = dF_i;$$

il est clair que

$$\lambda_{11}\varphi_1(F_1) + \lambda_{12}\varphi_2(F_2) + \ldots + \lambda_{1n}\varphi_n(F_n),$$
$$\lambda_{21}\varphi_1(F_1) + \lambda_{22}\varphi_2(F_2) + \ldots + \lambda_{2n}\varphi_n(F_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

constituera, quelles que soient les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots,$ un nouveau système de multiplicateurs. Mais *il n'existe que n systèmes de multiplicateurs distincts.*

En effet, il n'existe que n intégrales distinctes de la forme (3); par conséquent, si l'on appelle

$$(4)\qquad \begin{cases} \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \ldots, & \lambda_{1n}, \\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \ldots, & \lambda_{2n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \lambda_{n1}, & \lambda_{n2}, & \ldots, & \lambda_{nn} \end{cases}$$

les systèmes de multiplicateurs qui, appliqués aux équations (1), donnent lieu aux intégrales (2), toute intégrale du système (1) sera de la forme

$$\psi(F_1, F_2, \ldots, F_n) = \text{const.}$$

Tout système de multiplicateurs appliqué aux équations (1) devra donc fournir une différentielle de la forme

$$\frac{d\psi}{dF_1}dF_1 + \frac{d\psi}{dF_2}dF_2 + \ldots + \frac{d\psi}{dF_n}dF_n = 0,$$

et sera, par suite, une combinaison des multiplicateurs (4).

Pour nous en convaincre, écrivons ainsi la formule précédente

$$\frac{d\psi}{dF_1}(\lambda_{11}\Omega_1 + \lambda_{12}\Omega_2 + \ldots) + \frac{d\psi}{dF_2}(\lambda_{21}\Omega_1 + \lambda_{22}\Omega_2 + \ldots) + \ldots = 0,$$

et nous reconnaissons que les multiplicateurs en question sont

$$\frac{d\psi}{dF_1}\lambda_{11}+\frac{d\psi}{dF_2}\lambda_{21}+\ldots+\frac{d\psi}{dF_n}\lambda_{n1},$$

$$\frac{d\psi}{dF_1}\lambda_{12}+\frac{d\psi}{dF_2}\lambda_{22}+\ldots+\frac{d\psi}{dF_n}\lambda_{n2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque. — Les équations différentielles proposées peuvent être remplacées par les suivantes, que l'on en déduit par l'application des multiplicateurs (4),

$$\lambda_{11}\Omega_1+\lambda_{12}\Omega_2+\ldots+\lambda_{1n}\Omega_n=0=dF_1,$$
$$\lambda_{21}\Omega_1+\lambda_{22}\Omega_2+\ldots+\lambda_{2n}\Omega_n=0=dF_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\lambda_{n1}\Omega_1+\lambda_{n2}\Omega_2+\ldots+\lambda_{nn}\Omega_n=0=dF_n,$$

et qui sont immédiatement intégrables. Ces dernières équations sont satisfaites, non seulement quand on y suppose $\Omega_1=0$, $\Omega_2=0$, ..., mais encore quand, Ω_1, Ω_2, ... cessant d'être nuls, $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ ont des valeurs telles que le déterminant Λ des multiplicateurs (4) soit nul; on a d'ailleurs identiquement

$$\Omega_1=\frac{1}{\Lambda}\left(\frac{d\Lambda}{d\lambda_{11}}dF_1+\frac{d\Lambda}{d\lambda_{21}}dF_2+\ldots+\frac{d\Lambda}{d\lambda_{n1}}dF_n\right)\ldots,$$

de sorte que l'on peut annuler les quantités Ω soit en posant dF_1, dF_2, ... égaux à zéro, soit en posant $\frac{1}{\Lambda}$ égal à zéro ou $\Lambda=\infty$. Ainsi, *en égalant à zéro l'inverse du déterminant des systèmes de multiplicateurs, on peut obtenir une solution des équations proposées.*

Nous avons dit qu'il n'existait que n systèmes de multiplicateurs distincts. Si donc on connaissait un système de multiplicateurs distincts, le système (4) par exemple, tout nouveau système rentrerait dans celui-ci, en sorte que, $\lambda_{n+1,1}$, $\lambda_{n+1,2}$, ... désignant de nouveaux multiplicateurs, on aurait

$$\lambda_{n+1,i} = \frac{d\psi}{dF_1}\lambda_{1i} + \frac{d\psi}{dF_2}\lambda_{2i} + \ldots + \frac{d\psi}{dF_n}\lambda_{ni}.$$

De ces équations on tire

$$\frac{d\psi}{dF_1} = \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{d\Lambda}{d\lambda_{11}}\lambda_{n+1,1} + \frac{d\Lambda}{d\lambda_{21}}\lambda_{n+1,2} + \ldots\right)\ldots.$$

Les fonctions $\frac{d\psi}{dF_1}$, $\frac{d\psi}{dF_2}$, $\cdots$ pourront donc s'exprimer à l'aide des seules quantités λ_{ij}, et en les égalant à des constantes on exprimera que $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont constants; par suite, on aura ainsi les intégrales des équations proposées.

Les équations $\frac{d\psi}{dF_1} = 0$, $\frac{d\psi}{dF_2} = 0$, ... seront distinctes, sans quoi il existerait une relation de la forme

$$f\left(\frac{d\psi}{dF_1}, \frac{d\psi}{dF_2}, \ldots, \frac{d\psi}{dF_n}\right) = 0$$

entre $F_1, F_2, \ldots, F_n$, qui ne seraient pas des fonctions distinctes.

Pour faire une application utile de la théorie précédente, considérons le système d'équations linéaires

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx} &= X_{11}x_1 + X_{12}x_2 + \ldots + X_{1n}x_n + X_{10},\\ \frac{dx_2}{dx} &= X_{21}x_1 + X_{22}x_2 + \ldots + X_{2n}x_n + X_{20},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \frac{dx_n}{dx} &= X_{n1}x_1 + X_{n2}x_2 + \ldots + X_{nn}x_n + X_{n0}, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles X_{ij} désigne en général une fonction de la seule variable x. Multiplions la première de ces équations par λ_1, la seconde par λ_2, ..., et ajoutons ; nous aurons

$$\begin{aligned}&\lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2 + \ldots + \lambda_n dx_n\\ &\quad - [\lambda_1(X_{11}x_1 + X_{12}x_2 + \ldots + X_{10}) + \ldots]\,dx = 0.\end{aligned}$$

Pour que le premier membre de cette équation soit une différentielle exacte, il faut et il suffit que l'on ait

$$(6)\qquad \frac{d\lambda_i}{dx_j} = \frac{d\lambda_j}{dx_i},$$

quels que soient i et j, et que

$$(7)\qquad \frac{d\lambda_i}{dx} = -\frac{d}{dx_i}[\lambda_1(X_{11}x_1 + \ldots + X_{10}) + \ldots],$$

quel que soit i. Or il est assez facile de satisfaire à ces dernières équations en prenant pour $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des fonctions de la seule variable x. En effet, alors les équations (6) deviennent identiques et les équations (7) se réduisent à

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\lambda_1}{dx} &= -(\lambda_1 X_{11} + \lambda_2 X_{21} + \ldots + \lambda_n X_{n1}),\\
\frac{d\lambda_2}{dx} &= -(\lambda_1 X_{12} + \lambda_2 X_{22} + \ldots + \lambda_n X_{n2}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{d\lambda_n}{dx} &= -(\lambda_1 X_{1n} + \lambda_2 X_{2n} + \ldots + \lambda_n X_{nn}).
\end{aligned}\right.$$

Les multiplicateurs satisfont donc aussi à un système d'équations linéaires; mais ce système est en général plus simple que le système proposé (5), puisqu'il ne renferme plus les quantités X_{10}, X_{20}, ..., que l'on appelle les seconds membres des équations proposées.

Quand on aura intégré les équations (8) sans seconds membres, de simples quadratures feront connaître les inconnues x_1, x_2, ..., x_n. Cette manière d'intégrer en faisant usage des multiplicateurs sera généralement plus avantageuse que la méthode connue de la variation des constantes. En effet, la méthode de la variation des constantes impose certaines quadratures au calculateur ; la méthode des multiplicateurs, au contraire, conduit à l'intégration de différentielles totales, ce qui laisse beaucoup de choix dans la manière de diriger les calculs.

Il est a remarquer que les multiplicateurs des équations (8) sont précisément les solutions des équations (5), abstraction faite des termes $X_{10}, X_{20}, \ldots$, à savoir

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx} = X_{11}x_1 + X_{12}x_2 + \ldots + X_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dx} = X_{21}x_1 + X_{22}x_2 + \ldots + X_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dx_n}{dx} = X_{n1}x_1 + X_{n2}x_2 + \ldots + X_{nn}x_n, \end{cases}$$

en sorte que l'intégration de l'un des systèmes (8), (9) entraîne celle de l'autre système.

Il y a plus, on peut considérer simultanément les deux systèmes (8) et (9), et l'on peut toujours en déduire une intégrale; il suffit pour cela de multiplier les équations du système (8) par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, celles du système (9) par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et d'ajouter; on a alors

$$x_1 d\lambda_1 + \lambda_1 dx_1 + \ldots + x_n d\lambda_n + \lambda_n dx_n = 0,$$

ou

$$(10)\qquad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \text{const.}$$

Posons

$$H = \Sigma \lambda_i x_j X_{ij};$$

il est facile de voir que les systèmes (8) et (9) forment un système canonique. En effet, on peut les écrire

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{dH}{d\lambda_1}, \qquad \frac{dx_2}{dx} = \frac{dH}{d\lambda_2}, \qquad \ldots,$$

$$\frac{d\lambda_1}{dx} = -\frac{dH}{dx_1}, \quad \frac{d\lambda_2}{dx} = -\frac{dH}{dx_2}, \qquad \ldots.$$

Tout système d'équations linéaires peut donc se ramener à un système canonique. contenant, il est vrai, un nombre double d'équations, mais dont on connaît une solution (10).

La recherche des multiplicateurs est un peu plus facile en général que la résolution des équations proposées elles-mêmes. Supposons, en effet, le système des équations à intégrer ramené à la forme

$$(11) \qquad \frac{dx_1}{dx} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dx} = X_2, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dx} = X_n.$$

Si l'on appelle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ un système de multiplicateurs, on devra avoir

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2 + \ldots \\ \qquad + \lambda_n dx_n - dx(\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n) = \text{diff. exacte}. \end{array} \right.$$

Mais trouver des fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ satisfaisant à cette condition, c'est intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$(13) \qquad \frac{du}{dx} + X_1 \frac{du}{dx_1} + \ldots + X_n \frac{du}{dx_n} = 0,$$

et les dérivées $\frac{du}{dx_1}, \ldots, \frac{du}{dx_n}$ de la fonction u seront les multiplicateurs cherchés. Pour trouver un système de multiplicateurs, il n'est donc pas nécessaire d'intégrer complètement l'équation (12), équivalente aux équations (11), il suffit d'avoir seulement les dérivées relatives à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la fonction u qui y satisfait.

On pourrait de la théorie précédente déduire la méthode connue pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles. A cet effet, on raisonnera ainsi :

Intégrer l'équation (13), ou

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + X_1\lambda_1 + \ldots + X_n\lambda_n = 0,$$

dans laquelle on a posé pour simplifier $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x_i} = \lambda_i$, c'est trouver des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ telles que l'équation (12) ait lieu. Or $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ne sont autre chose que les multiplicateurs des équations (11). On calculera ces multiplicateurs, si l'on veut, en intégrant ces équations (11). Soit $u =$ const. une intégrale du système (11) en question; on aura précisément

$$\lambda_1 dx_1 + \ldots + \lambda_n dx_n - dx(\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n) = du,$$

d'où l'on conclura que u est précisément la fonction qui, égalée à une constante, est une intégrale de (11).

Cette manière de retrouver la règle donnée par Lagrange et confirmée par Jacobi a peut-être l'avantage d'entrer plus au cœur de la question et de mieux montrer le rôle que jouent les fonctions intégrales et leurs dérivées.