NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉDOUARD LUCAS

Sur un théorème de M. Laguerre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 145-147

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__145_0>

SUR UN THÉORÈME DE M. LAGUERRE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

M. Laguerre a exposé dernièrement quelques considérations nouvelles et fort remarquables sur la séparation des racines d'une équation algébrique à coefficients numériques (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII, p. 1, et t. XIX, p. 49; *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 13 octobre 1879).

Voici, je pense, une manière plus simple et plus élémentaire de présenter le principal résultat, sans qu'il soit nécessaire d'employer la théorie des dérivées.

THÉORÈME DE LAGUERRE. — *Soient $f(x) = 0$ une équation algébrique, a un nombre positif, et*

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{f(x)}{x-a} &= f_0 x^{m-1} + f_1 x^{m-2} \\ &\quad + f_2 x^{m-3} + \ldots + f_{m-1} + \frac{f_m}{x-a}. \end{aligned} \right.$$

Le nombre des variations de la suite

$$(2)\qquad f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{m-1},\ f_m$$

est au moins égal au nombre des racines de l'équation donnée qui sont plus grandes que a. Si le nombre des racines plus grandes que a est inférieur au nombre des variations de la suite, la différence est un nombre pair.

Nous remarquerons d'abord que pour $a = 0$ on retrouve le théorème de Descartes. Quant à la démonstration, elle est absolument semblable à celle que l'on donne dans les Cours pour ce dernier théorème. En effet, soit b un nombre plus grand que a; si l'on multiplie le premier membre de l'équation (1) par $x-b$, on a

$$\frac{(x-b)f(x)}{x-a} = g_0 x^m + g_1 x^{m-1} + \dots$$
$$+ g_{m-1} x + g_m - (b-a)\frac{f_m}{x-a},$$

et l'on démontre de même que le nombre des variations de la suite

(3) $\qquad g_0,\ g_1,\ \dots,\ g_{m-1},\ g_m,\ -bf_m$

surpasse au moins d'une unité, et en général d'un nombre impair, le nombre des variations de la suite (2).

C. Q. F. D.

Cela posé, soient l'équation

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_m = 0,$$

et a un nombre positif; on calcule successivement

$$\begin{aligned}
f_0 &= A_0,\\
f_1 &= A_0 a + A_1,\\
f_2 &= A_0 a^2 + A_1 a + A_2,\\
f_3 &= A_0 a^3 + A_1 a^2 + A_2 a + A_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,\\
f_m &= A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} + \dots + A_m.
\end{aligned}$$

Le nombre des variations de $(f_0, \dots, f_m)$ est une limite supérieure du nombre des racines plus grandes que a. De même, en changeant x en $\frac{1}{x}$, on déduit que le nombre des racines de l'équation proposée comprises entre 0 et a ne peut surpasser le nombre des variations de la suite

$$A_m,$$

$$A_m \frac{1}{a} + A_{m-1},$$

$$A_m \frac{1}{a^2} + A_{m-1} \frac{1}{a} + A_{m-2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$A_m \frac{1}{a^m} + A_{m-1} \frac{1}{a^{m-1}} + \dots + A_0;$$

de plus, si ces deux nombres diffèrent, la différence est un nombre pair.

Exemple. — Soit l'équation

$$x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x + 1 = 0.$$

D'après le théorème de Descartes, il y a, au plus, quatre racines positives.

Pour $a = 1$, on forme la suite

$$+1, \quad -3, \quad 0, \quad -2, \quad +5, \quad +6;$$

donc il y a au plus deux racines plus grandes que 1 ; en formant la suite inverse, on trouve

$$+1, \quad +8, \quad +6, \quad +9, \quad +5, \quad +6;$$

donc il n'y a pas de racines réelles entre 0 et 1 ; ainsi il y a au plus deux racines positives, que l'on sépare en faisant $a = 2$.

Remarque. — On peut appliquer les considérations qui précèdent aux équations de la forme

$$f(x) + \frac{A}{(x-a)\varphi(x)} = 0 \quad \text{et} \quad f(x) + \frac{A}{x-a}\varphi(x) = 0,$$

et l'on obtient des théorèmes intéressants.