NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Démonstration géométrique d'une propriété des foyers extérieurs au plan d'une conique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 120-122

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__120_1>

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE PROPRIÉTÉ DES FOYERS EXTÉRIEURS AU PLAN D'UNE CONIQUE ;

PAR M. E. G.,

Ancien élève du lycée de Reims.

On sait que du foyer d'une conique on voit sous un angle constant la portion d'une tangente mobile interceptée par deux tangentes fixes. On peut se demander si cette propriété n'appartient pas aussi aux foyers extérieurs au plan de la conique.

Cherchons donc, étant donnée une conique dans un plan, quels sont les points de l'espace d'où l'on voit sous un angle constant la portion d'une tangente mobile interceptée par deux tangentes fixes.

Je rappellerai d'abord le lemme suivant :

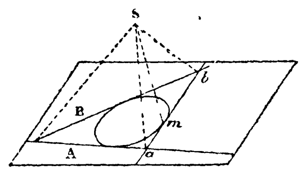
Quand on fait coïncider deux plans en faisant tourner l'un d'eux autour de leur intersection, les points circulaires à l'infini des deux plans viennent coïncider.

Il suffit pour s'en rendre compte de considérer un cercle dans chacun des deux plans.

Cela posé, soient une conique Σ, deux tangentes fixes A et B, et un point S de l'espace satisfaisant à la condition énoncée.

Considérons une tangente quelconque ab. Tous les

Fig. 1.

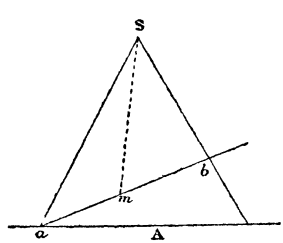


plans tels que Sab enveloppent un cône SΣ ayant la conique pour base et le point S pour sommet.

Rabattons tous ces plans sur l'un d'eux, sur le plan SA par exemple, par une rotation autour de leur intersection, telle que Sa avec ce plan.

Nous aurons dans le plan SA deux faisceaux homographiques engendrés par un angle constant aSb tournant autour de son sommet. Les rayons doubles de ces faisceaux seront donc les droites isotropes issues du point S dans le plan SA. Or les rayons doubles correspondent au cas où la droite ab (*fig.* 2) passe par le point S, et, dans

Fig. 2.



ce cas, ab se confond avec ce rayon double, qui n'est autre lui-même que la génératrice correspondante Sm du cône SΣ. Il en résulte que, dans le cas qui nous occupe, la droite ab sera perpendiculaire à la génératrice Sm, puisque les droites isotropes jouissent de la propriété d'être perpendiculaires à elles-mêmes.