Nouvelles annales de mathématiques

Ch. Biehler

Sur la transformation du déterminant de M. Sylvester en celui de Cauchy

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 110-115

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__110_0>

SUR LA TRANSFORMATION DU DÉTERMINANT DE M. SYLVESTER EN CELUI DE CAUCHY;

PAR M. CH. BIEHLER.

Lorsqu'on a deux équations, l'une $f(x)=0$ de degré m, l'autre $\varphi(x)=0$ de degré p (nous supposerons $p<m$), savoir

$$(1)\qquad f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m=0,$$

$$(2)\qquad \varphi(x)=B_0x^p+B_1x^{p-1}+\ldots+B_p=0,$$

on peut exprimer sous deux formes différentes la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux équations aient une racine commune.

L'une d'elles, due à M. Sylvester, s'obtient, comme l'on sait, en égalant à zéro le déterminant d'ordre $m+p$ du système des $m+p$ équations

$$\begin{array}{ll}
x^{p-1}f(x)=0, & x^{m-1}\varphi(x)=0,\\
x^{p-2}f(x)=0, & x^{m-2}\varphi(x)=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots,\\
xf(x)=0, & x\,\varphi(x)=0,\\
f(x)=0, & \varphi(x)=0,
\end{array}$$

considérées comme linéaires en x^{m+p-1}, x^{m+p-2}, ..., x, x^0.

La seconde a été donnée par Cauchy : elle s'obtient en égalant à zéro un déterminant d'ordre m que l'on forme comme il suit. On considère les p équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{A_0x^{\mu-1}+A_1x^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-1}}{B_0x^{\mu+p-m-1}+\ldots+B_{\mu+p-m-1}}\\
&\quad=\frac{A_\mu x^{m-\mu}+A_{\mu+1}x^{m-\mu-1}+\ldots+A_m}{B_{\mu+p-m}x^{m-\mu}+B_{\mu+p-m+1}x^{m-\mu-1}+\ldots+B_p},
\end{aligned}\right.$$

qu'on obtient en donnant à μ les p valeurs $m-p+1$, $m-p+2$, ..., $m-1$, m; on ajoute à ces p équations de degré $m-1$ en x les $m-p$ suivantes,

$$\begin{aligned}
x^{m-p-1}\varphi(x) &= 0,\\
x^{m-p-2}\varphi(x) &= 0,\\
\ldots\ldots&\ldots,\\
x\varphi(x) &= 0,\\
\varphi(x) &= 0,
\end{aligned}$$

et l'on égale à zéro le déterminant du système de ces m équations considérées comme linéaires en x^{m-1}, x^{m-2}, ..., x, x^0.

Si l'on désigne, d'une manière générale, par f_μ et φ_μ les polynômes

$$f_\mu = A_0 x^\mu + A_1 x^{\mu-1} + \ldots + A_\mu,$$
$$\varphi_\mu = B_0 x^{\mu+p-m} + B_1 x^{\mu+p-m-1} + \ldots + B_{\mu+p-m},$$

l'équation (3) pourra s'écrire

$$\frac{f_{\mu-1}}{\varphi_{\mu-1}} = \frac{A_\mu x^{m-\mu} + \ldots + A_m}{B_{\mu+p-m} x^{m-\mu} + \ldots + B_p},$$

ou bien

$$\frac{f_{\mu-1}}{\varphi_{\mu-1}} = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

par suite

$$(4)\qquad f_{\mu-1}\varphi(x) - \varphi_{\mu-1} f(x) = 0.$$

Soit $G_{\mu,\nu}$ le coefficient de $x^{m-\nu}$ dans cette équation ; on aura

$$f_{\mu-1}\varphi(x) - \varphi_{\mu-1}f(x) = G_{\mu,1}x^{m-1} + G_{\mu,2}x^{m-2} + \ldots + G_{\mu,\nu}x^{m-\nu} + \ldots + G_{\mu,m}.$$

Le déterminant de Cauchy sera donc

$$\begin{vmatrix}
G_{m-p+1,1} & G_{m-p+1,2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & G_{m-p+1,m}\\
G_{m-p+2,1} & G_{m-p+2,2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & G_{m-p+2,m}\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\\
G_{m,1} & G_{m,2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & G_{m,m}\\
B_0 & B_1 & \ldots & \ldots & B_p & 0 & 0\\
0 & B_0 & \ldots & \ldots & B_{p-1} & B_p & 0\\
0 & 0 & \ldots & B_0 & \ldots & \ldots & B_p
\end{vmatrix}.$$

Nous allons démontrer que ce déterminant est identique, à un facteur numérique près, à celui de M. Sylvester, savoir

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \ldots & A_m & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & \ldots & A_{m-1} & A_m & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & \ldots & \ldots & A_{m-1} & A_m & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & .. & \ldots & \ldots & \ldots & .. & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_0 & A_1 & .. & \ldots & A_{m-1} & A_m \\ B_0 & B_1 & . & B_p & 0 & .. & .. & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & . & B_{p-1} & B_p & 0 & .. & \ldots & 0 & 0 \\ . & .. & . & \ldots & .. & . & .. & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & . & \ldots & .. & 0 & B_0 & \ldots & B_{p-1} & B_p \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant renferme les coefficients A dans ses p premières lignes et les coefficients B dans les m dernières.

Pour opérer la transformation de ce déterminant en celui de Cauchy, remplaçons les éléments de la $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne de Δ, savoir

$$B_0,\ B_1,\ \ldots,\ B_p,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0,$$

par les sommes que l'on obtient en ajoutant entre eux les éléments d'une même colonne de Δ, après avoir multiplié les éléments des lignes successives respectivement par

$$-B_0,\ -B_1,\ \ldots,\ -B_{p-1},\ A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_{m-1};$$

les sommes obtenues sont évidemment les coefficients des diverses puissances de x dans la fonction

$$f_{m-1}\varphi(x) - \varphi_{m-1}f(x).$$

On sait que cette fonction n'est que de degré $m-1$ et que l'on a

$$f_{m-1}\varphi(x) - \varphi_{m-1}f(x) = G_{m,1}x^{m-1} + G_{m,2}x^{m-2} + \ldots + G_{m,m};$$

les éléments de la $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne deviennent donc, par cette transformation,

$$o, \ o, \ o, \ \ldots, \ o, \ G_{m,1}, \ G_{m,2}, \ \ldots, \ G_{m,m}.$$

La substitution de ces éléments à la place de ceux de la $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne de Δ a eu pour effet de multiplier le déterminant Δ par A_0.

Laissant actuellement intacts les éléments de la première et de la $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne, multiplions ceux de la deuxième, troisième, ..., $p^{\text{ième}}$ respectivement par

$$-B_0, \ -B_1, \ \ldots, \ -B_{p-2},$$

ceux de la $(p+2)^{\text{ième}}$, $(p+3)^{\text{ième}}$, ..., $(p+m)^{\text{ième}}$ respectivement par

$$A_0, \ A_1, \ \ldots, \ A_{m-2},$$

et remplaçons les éléments de la $(p+2)^{\text{ième}}$ ligne de Δ par les sommes qu'on obtient en ajoutant par colonnes les éléments ainsi modifiés; ces sommes sont les coefficients des diverses puissances de x dans la fonction

$$f_{m-2}\varphi(x) - \varphi_{m-2}f(x),$$

qui est égale à

$$G_{m-1,1}x^{m-1} + G_{m-1,2}x^{m-2} + \ldots + G_{m-1,m}.$$

Cette substitution a encore pour effet de multiplier Δ par A_0.

En laissant maintenant intacts les éléments des deux premières lignes et ceux de la $(p+1)^{\text{ième}}$ et de la $(p+2)^{\text{ième}}$, multiplions ceux des troisième, quatrième, cinquième, ..., $p^{\text{iée}}$ rangées respectivement par $-B_0$, $-B_1, \ldots, -B_{p-3}$, ceux des $(p+3)^{\text{ième}}$, ..., $(p+m)^{\text{ième}}$ par $+A_0, A_1, \ldots, A_{m-3}$, et ajoutons les éléments modifiés par colonnes; on obtient les éléments

$$o, \ o, \ \ldots, \ o, \ G_{m-2,1}, \ G_{m-2,2}, \ \ldots, \ G_{m-2,m}.$$

Après p opérations analogues, les $(p+1)^{\text{ième}}$, $(p+2)^{\text{ième}}$, ..., $(2p)^{\text{ième}}$ rangées de Δ auront été remplacées par

$$\begin{array}{l}
0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ G_{m,1},\quad G_{m,2},\quad \ldots,\ G_{m,m},\\
0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ G_{m-1,1},\quad G_{m-1,2},\quad \ldots,\ G_{m-1,m},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ G_{m-p+1,1},\ G_{m-p+1,2},\ \ldots,\ G_{m-p+1,m}.
\end{array}$$

Les $m-p$ dernières rangées de Δ n'auront pas varié, et Δ aura été multiplié par A_0^p; on aura donc

$$A_0^p\Delta = \begin{vmatrix}
A_0 & A_1 & \ldots & & A_m & 0 & 0\ 0\ . & 0 & 0\\
0 & A_0 & \ldots & & A_{m-1} & A_m & 0\ 0\ . & 0 & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & \ldots & A_0 & \ldots & \ldots & \ldots & A_{m-1} & A_m\\
0 & 0 & \ldots & 0 & G_{m,1} & G_{m,2} & \ldots & G_{m,m-1} & G_{m,m}\\
0 & 0 & \ldots & 0 & G_{m-1,1} & G_{m-1,2} & \ldots & G_{m-1,m-1} & G_{m-1,m}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & \ldots & 0 & G_{m-p+1,1} & G_{m-p+1,2} & \ldots & G_{m-p+1,m-1} & G_{m-p+1,m}\\
0 & 0 & \ldots & 0 & B_0 & B_1 & .\ B_p\ 0 & \ldots & 0\\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & B_0 & \ldots\ B_p & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & .\ B_0 & \ldots & B_p
\end{vmatrix}.$$

Si l'on supprime de part et d'autre le facteur A_0^p, il viendra

$$\Delta = \begin{vmatrix}
G_{m,1} & G_{m,2} & . & . & . & . & G_{m,m}\\
G_{m-1,1} & G_{m-1,2} & . & . & . & . & G_{m-1,m}\\
\ldots & \ldots & . & . & . & . & \ldots\\
G_{m-p+1,1} & G_{m-p+1,2} & . & . & . & . & G_{m-p+1,m}\\
B_0 & B_1 & . & B_p & 0 & . & 0\\
0 & B_0 & . & B_{p-1} & B_p & . & 0\\
. & \ldots & . & \ldots & \ldots & . & .\\
0 & 0 & B_0 & \ldots & \ldots & . & B_p
\end{vmatrix}.$$

Le second membre est identique au déterminant de Cauchy, abstraction faite du facteur $(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}$.

Si donc on désigne par Δ_1 le déterminant de Cauchy, on aura

$$\Delta = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \Delta_1.$$

M. Ventéjol, dans un Mémoire sur l'élimination (15 février 1877), a donné une méthode pour opérer cette transformation. M. Ventéjol effectue la transformation sur un exemple particulier, ce qui ne montre peut-être pas assez la généralité de la proposition; il m'a paru intéressant de donner une démonstration générale, qui met mieux en évidence le principe de la méthode.