Nouvelles annales de mathématiques

A. Tourrettes

Solution d'une question de licence (1875) (faculté de Paris)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 97-101

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__97_0>

SOLUTION D'UNE QUESTION DE LICENCE (1875)

(FACULTE DE PARIS);

PAR M. A. TOURRETTES.

Un point matériel pesant assujetti à rester sur une sphère de rayon a est attiré proportionnellement à la distance par un point B *situé sur la verticale* Oz *du centre de la sphère, à une distance* OB $= b$ *de ce centre. On donne la valeur* μ *de l'attraction à l'unité de distance, l'intensité g de la pesanteur, la vitesse initiale k du point mobile, laquelle est supposée horizontale, et enfin la distance h de ce point au plan horizontal* xOy *qui passe par le centre de la sphère.*

On demande : 1° les limites entre lesquelles variera, pendant le mouvement, l'ordonnée z du mobile; 2° de déterminer complétement ce mouvement dans le cas particulier où l'attraction du point B *sur le centre de la sphère est égale et contraire à la pesanteur.*

Soient m la masse de A, 1 celle de B, N la pression sur la sphère, les équations du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x + \frac{N}{m}\frac{x}{a},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\mu y + \frac{N}{m}\frac{y}{a},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\mu(z-b) - g + \frac{N}{m}\frac{z}{a}.$$

Multipliant la première par y et la deuxième par x, puis retranchant les résultats, on trouve

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

d'où

$$(1) \qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C.$$

C'est une première équation, celle qu'on obtiendrait en appliquant le principe des aires. En multipliant respectivement par $2dx$, $2dy$, $2dz$ et ajoutant, il vient, après des réductions évidentes,

$$dv^2 = 2(\mu b - g)\,dz,$$

d'où

$$(2) \qquad v^2 = C' + 2(\mu b - g)z.$$

Ces deux équations avec celle de la sphère

$$(3) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

suffisent pour déterminer le mouvement.

Il faut maintenant trouver la valeur des constantes en fonction des données initiales.

La vitesse k étant horizontale se projette sur xOy suivant une perpendiculaire à la projection de OA. Soit r cette projection et φ son angle avec Ox; on aura

$$r\frac{d\varphi}{dt} = k,$$

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = rk = C.$$

Mais à l'origine du mouvement $r = \sqrt{a^2 - h^2}$: donc

$$C = k\sqrt{a^2 - h^2}.$$

Pour déterminer C', il suffit de faire $v^2 = k^2$ et $z = h$,

$$C' = k^2 - 2(\mu b - g)h.$$

Par conséquent, les équations (1) et (2) deviennent

$$(4) \qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k\sqrt{a^2 - h^2}$$

$$(5) \qquad v^2 = k^2 + 2(\mu b - g)(z - h).$$

L'équation (3) donne

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

ou

$$(6)\qquad x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = -z\frac{dz}{dt}.$$

Ajoutant (4) et (5) après les avoir élevées au carré, il vient

$$(x^2+y^2)\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = k^2(a^2-h^2) + z^2\frac{dz^2}{dt^2}.$$

Remplaçant x^2+y^2 par a^2-z^2, $\dfrac{dx^2+dy^2}{dt^2}$ par $k^2 + 2(\mu b - g)(z-h) - \dfrac{dz^2}{dt^2}$, il vient facilement

$$(7)\quad a\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{2(\mu b - g)(z-h)(a^2-z^2) - k^2(z^2-h^2)}.$$

Cette équation donnera z en fonction de t; mais l'intégration n'est pas possible généralement.

Cherchons les limites de z. Pour cela, il faut égaler le radical à zéro. Nous apercevons immédiatement le facteur $z-h$; ainsi $z=h$ est une des limites; ce qui était facile à prévoir, puisque, quand $z=h$, la vitesse est horizontale et par suite $dz=0$. En décrivant par $z-h$ le polynôme sous le radical, il vient

$$(8)\qquad 2(\mu b - g)z^2 + k^2 z - 2(\mu b - g)a^2 + k^2 h = 0.$$

Si l'on substitue $-a$ et $-\infty$, on trouve $-k^2(a^2-h^2)$ et $+\infty$; donc il y a une racine négative qu'il faut rejeter. L'autre racine sera donc la seconde limite, et, puisque le point est sur la sphère, elle sera nécessairement plus petite que a en valeur absolue.

En résolvant (8), on trouve

$$z = \frac{-k^2 \pm \sqrt{k^4 - 8(\mu b - g)[k^2 h - 2(\mu b - g)a^2]}}{2(\mu b - g)}.$$

La deuxième limite sera $z' = \dfrac{-k^2 + \sqrt{}}{2(\mu b - g)}$.

L'autre racine étant nécessairement négative, il faut $\mu b - g \geq 0$.

Je vais maintenant examiner le cas particulier où l'attraction du point B sur le centre de la sphère est égale et contraire à la pesanteur.

Dans ce cas, $\mu b = g$ et, par suite,

$$a\frac{dz}{dt} = \pm k\sqrt{h^2 - z^2},$$

d'où

$$dt = -\frac{a\,dz}{k\sqrt{h^2 - z^2}}.$$

On prend le signe —, parce que z commence par diminuer quand t augmente ; il faudra au contraire prendre le signe + quand le mobile aura atteint la deuxième limite.

L'équation ci-dessus s'intègre immédiatement et donne

$$t = \frac{a}{k}\arccos\frac{z}{h},$$

sans constante.

On en tire

$$z = h\cos\frac{kt}{a}. \tag{8}$$

Maintenant, l'équation (4) peut s'écrire

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = k\sqrt{a^2 - h^2},$$

où $r^2 = a^2 - z^2$; par suite,

$$d\varphi = \frac{k\sqrt{a^2 - h^2}\,dt}{a - h^2\cos^2\frac{kt}{a}},$$

dont l'intégrale est

$$(9)\qquad \varphi = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - h^2}}\operatorname{tang}\frac{kt}{a}\right).$$

La constante est nulle; on trouvera le détail de l'intégration dans les *Exercices* de Frenet, nos 348, 349.

Si l'on veut l'équation de la projection de la trajectoire sur le plan xOy, il faut éliminer t entre (9) et

$$r^2 = a^2 - z^2 = a^2 - h^2\cos^2\frac{kt}{a},$$

ce qui donne

$$r = \frac{a\sqrt{a^2 - h^2}}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + (a^2 - h^2)\sin^2\varphi}}$$

ou, en coordonnées rectangulaires,

$$a^2x^2 + (a^2 - h^2)y^2 = a^2(a^2 - h^2).$$

C'est une ellipse ayant pour axes $\sqrt{a^2 - h^2}$ et a.

Remarque. — Dans le cas particulier que je viens d'examiner, la deuxième limite de z est $-h$; par suite, la durée de la descente du mobile est $\frac{a\pi}{k}$. Cela posé, pour représenter le mouvement ascendant, il faut se servir de

$$dt = +\frac{a}{k}\frac{dz}{\sqrt{h^2 - z^2}},\qquad \text{d'où}\qquad t = C'' + \frac{a}{k}\arcsin\frac{z}{h}.$$

On pose $t = \frac{a\pi}{k}$ pour $z = -h$; il vient pour C''

$$C'' = -\frac{\pi}{2}\frac{a}{k};$$

par suite,

$$\frac{z}{h} = \arcsin\left(\frac{kt}{a} + \frac{\pi}{2}\right) = \arccos\frac{kt}{a}.$$

Ainsi la formule (8) représente tout le mouvement: il en est de même de (9), qui en est une conséquence.