NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. MALEYX

Propriété de la tangente à l'ellipse ; construction du point commun à deux normales infiniment voisines ; directrice relative à un foyer

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 85-89

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__85_1>

PROPRIÉTÉ DE LA TANGENTE A L'ELLIPSE; CONSTRUCTION DU POINT COMMUN A DEUX NORMALES INFINIMENT VOISINES; DIRECTRICE RELATIVE A UN FOYER;

PAR M. L. MALEYX.

1. Soient F, F_1 les deux foyers d'une ellipse dont le grand axe est $2a$ et la distance des foyers $2c$; décrivons le cercle directeur du point F comme centre avec le rayon $2a$ (*fig.* 1); considérons la sécante MM_1, que nous allons faire tourner autour du point M jusqu'à ce qu'elle devienne tangente; traçons les rayons vecteurs unissant les points M et M_1 aux foyers, et prolongeons FM, FM_1 jusqu'à ce qu'ils rencontrent le cercle directeur en N et N_1. Joignons actuellement le point S, où se coupent les droites MM_1, NN_1 prolongées, au foyer F_1, et menons par le point M_1 la droite M_1I parallèle à FN et limitée en I à la droite NN_1. Le triangle FNN_1 est isoscèle; donc il en est de même de M_1IN_1, et, par suite, $M_1I = M_1N_1$. On sait, du reste, d'après la propriété du cercle directeur, que $MN = MF_1$ et $M_1N_1 = M_1F_1$; on en déduit, en observant que les deux triangles SMN, SM_1I

sont semblables,

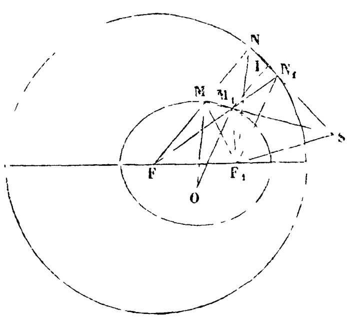
$$\frac{SM}{SM_1} = \frac{MN}{M_1I} = \frac{MN}{M_1N_1} = \frac{MF_1}{M_1F_1},$$

d'où l'on conclut que la droite F_1S est la bissectrice de l'angle extérieur du triangle MM_1F_1.

Lorsque la droite MS aura tourné autour du point M jusqu'à devenir tangente à l'ellipse, au même instant la droite SN sera devenue tangente au cercle et la bissectrice F_1S sera devenue perpendiculaire à MF_1; les limites des deux triangles MNS, MF_1S seront donc deux triangles rectangles ayant l'hypoténuse commune et le côté $MF_1 = MN$: donc ils seront égaux, leurs angles en M seront égaux, et la propriété connue est établie.

2. Les normales à l'ellipse aux points M et M_1 vont se couper en un point O dont nous allons chercher la limite quand le point M_1 se rapproche indéfiniment du

Fig. 1.



point M. Les deux droites NF_1, N_1F_1 (*fig.* 1) sont parallèles à ces deux normales MO, M_1O; le quadrilatère formé par les deux normales et les deux tangentes en M et M_1 est inscriptible dans un cercle dont le diamètre a pour limite la distance du point M au point cherché sur la ligne MO; désignons ce diamètre variable par d. Si nous comparons le cercle dont nous venons de parler à celui qui est circonscrit au triangle F_1NN_1, les rayons de ces cercles sont proportionnels aux cordes sous-tendant des arcs de même graduation, comme MM_1, NN_1, puisque $NF_1N_1 = MOM_1$; donc, désignant par d_1 le diamètre de ce dernier cercle, on a

$$\frac{d}{d_1} = \frac{MM_1}{NN_1}.$$

D'ailleurs, si l'on considère la transversale FM_1N_1 au triangle SMN, elle fournit l'égalité

$$SN_1 \times NF \times MM_1 = SM_1 \times MF \times NN_1$$

ou

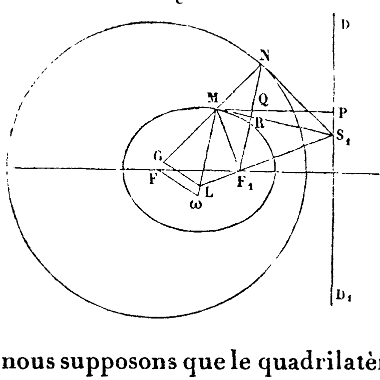
$$\frac{MM_1}{NN_1} = \frac{SM_1}{SN_1} \times \frac{MF}{2a},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{d}{d_1} = \frac{SM_1}{SN_1} \times \frac{MF}{2a}.$$

Les limites des deux membres de cette égalité seront

Fig. 2.



égales; or, si nous supposons que le quadrilatère S_1NMF_1 de la *fig.* 2 soit la limite du quadrilatère $SNMF_1$ de la *fig.* 1, observant du reste que le cercle circonscrit au triangle F_1NN_1 a pour limite le cercle passant par F_1 et tangent au cercle directeur en N, c'est-à-dire le cercle dont le centre est en M et passant par le point F_1, désignant enfin par ω la limite du point O, on aura (*fig.* 2)

$$\frac{M\omega}{2MF_1} = \frac{S_1M}{S_1N} \times \frac{MF}{2a}.$$

Si nous prolongeons S_1F_1, perpendiculaire à MF_1, jusqu'à la rencontre avec la normale en M au point L, le triangle MF_1L est semblable au triangle S_1NM ; on en déduit

$$\frac{S_1M}{S_1N} = \frac{ML}{MF_1};$$

remplaçant dans l'égalité précédente, il reste, après réduction,

$$\frac{M\omega}{ML} = \frac{MF}{a}.$$

Il suffit donc, pour obtenir le point ω, de prendre sur MF la longueur $MG = a$, d'unir le point G au point L, et de mener par le point F une parallèle à GL jusqu'à sa rencontre en ω avec la normale en M.

3. Il me paraît intéressant de placer ici la démonstration d'une proposition que j'ai reconstituée sur mes souvenirs des examens de M. Mannheim (1863).

Il s'agit de démontrer que le rapport des distances d'un point de l'ellipse à un foyer et à une droite fixe, appelée directrice, est constant et égal à $\frac{c}{a}$.

Si, dans la *fig.* 2, le point M de contact se déplace sur l'ellipse, le point S_1 décrira l'axe radical du point F_1 et du cercle directeur. Projetons le point M sur cette droite DD_1 ; le quadrilatère $PQRS_1$, dont deux angles opposés sont droits, est inscriptible, et l'on en déduit

$$MQ \times MP = MR \times MS_1;$$

du reste, d'après la considération du triangle rectangle MF_1S_1, on a aussi

$$MR \times MS_1 = MF_1^2,$$

d'où, par comparaison avec l'égalité précédente,

$$\frac{MF_1}{MP} = \frac{MQ}{MF_1};$$

mais le rapport $\frac{MQ}{MF_1}$, égal au rapport $\frac{MQ}{MN}$, l'est aussi au rapport $\frac{FF_1}{NF} = \frac{c}{a}$, d'après la similitude des triangles MNQ, NFF_1; donc enfin

$$\frac{MF_1}{MP} = \frac{c}{a}.$$

Inutile d'ajouter que ces démonstrations s'appliquent sans restriction à l'hyperbole.